UNIVERSITATEA OVIDIUS CONSTANTA
FACULTATEA DE MATEMATICA SI INFORMATICA
SPECIALIZAREA MATEMATICA (PROFESORI I)

(23 august 2005/ VARIANTA IV)

EXAMEN DE DEFINITIVAT

1. Se considera functiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3+\cos x}$ si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Sa se verifice ca $f(x+2\pi) = f(x)$ pentru orice x in $\mathbb{R}$;

b) Sa se arate ca nu exista $\lim_{x\to\infty} f(x)$;

c) Sa se arate ca $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ pentru orice x in $\mathbb{R}$;

d) Sa se arate ca orice primitiva a functiei f este strict crescatoare pe $\mathbb{R}$;

e) Sa se verifice ca

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right), \qquad \forall x \in [0,\pi);$$

f) Sa se calculeze $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

2. i) Sa se demonstreze identitatea

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}(n\alpha)}{1-i\operatorname{tg}(n\alpha)}$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt astfel incat $\operatorname{tg}\alpha$ si $\operatorname{tg}(n\alpha)$ au sens.

ii) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ astfel incat $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Sa se arate ca z_1, z_2, z_3 sunt afixele varfurilor unui triunghi echilateral.

3. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se considera sistemul de ecuatii

$$(S)\begin{cases} \left(a-\frac{1}{2}\right)x + by + cz = 0, \\ cx + \left(a-\frac{1}{2}\right)y + bz = 0, \\ bx + cy + \left(a-\frac{1}{2}\right)z = 0, \end{cases}$$

si polinomul $f = a - \frac{1}{2} + bX + cX^2 \in \mathbb{R}[X]$. Se noteaza

$$V = \{\alpha = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \text{ solutie a sistemului (S) }\}.$$

i) Sa se arate ca V este subspatiu vectorial in $\mathbb{R}^3$;

ii) Pentru $a = \frac{1}{2},\ b = 1,\ c = -1$, calculati dimensiunea peste $\mathbb{R}$ a lui V;

iii) Fie Δ determinantul sistemului (S). Sa se arate ca $\Delta = f(1)\, f(\varepsilon)\, f(\varepsilon^2)$, unde $\varepsilon \in \mathbb{C}$ verifica $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$;

iv) Folosind eventual punctul anterior, aratati ca pentru orice $a, b, c \in \mathbb{Z}$, spatiul solutiilor lui (S) este nul.

4. Ecuatia dreptei in plan (tratare metodica) la nivelul clasei a IX-a. Se vor aborda:

i) Conditia de coliniaritate pentru 3 puncte din plan;

ii) Ecuatia dreptei determinate de un punct si de o directie data;

iii) Ecuatia dreptei determinata de 2 puncte;

iv) Ecuatia generala a dreptei;

v) Formulati o problema referitoare la ecuatia dreptei in plan. Prezentati o metoda de rezolvare, la alegere.

Nota:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore.