Contribuţii la studiul conexiunilor dintre hiperstructuri algebrice şi mulţimi fuzzy

Teză de doctorat- rezumat

Irina Elena Cristea

Cuprins

Introducere

În anul 1934, la cel de al $VIII$-lea Congres al matematicienilor scandinavici, F.Marty a introdus pentru prima dată noţiunea de hipergrup, utilizând-o în diferite contexte: funcţii algebrice, fracţii raţionale, grupuri necomutative. Acest moment a reprezentat primul pas în dezvoltarea continuă a Teoriei Hiperstructurilor Algebrice în întreaga lume, cu precădere în Europa (Franţa, Italia, Grecia, România, Cehia şi Slovacia, Muntenegru, Serbia, Finlanda, Olanda, Germania), Australia, Statele Unite şi Canada, iar mai târziu şi în Iran, China, Thailanda, Japonia, Korea, Iordania. La început au fost studiate aspectele generale ale teoriei, legăturile cu Teoria Grupurilor şi diverse aplicaţii în geometrie (redefinirea cu ajutorul hipergrupurilor a geometriei sferice, proiective, descriptive). Teoria a cunoscut un progres deosebit începând cu anii $'70$, când s-a lărgit aria de cercetare. În Franţa, M.Krasner, M.Koskas şi Y.Sureau s-au ocupat de Teoria Subhipergrupurilor şi de relaţiile definite pe hiperstructuri; în Grecia, J.Mittas, D.Stratigopoulos, M.Kostantinidou, K.Serafimidis, Ch.G.Massouros au studiat hipergrupurile canonice, hiperinelele şi hipermodulele, hiperlaticile, hipercâmpurile cu aplicaţii în Teoria Automatelor. T.Vougiouklis a analizat cu precădere hipergrupurile ciclice, p-hipergrupurile şi reprezentările H_ϑ-structurilor. Contribuţii importante în studiul hipergrupurilor regulate, de asociativitate sau complete, a inimii şi a morfismelor de hipergrupuri în general sau cu aplicaţii în Combinatorică şi Geometrie au fost aduse de către grupul de matematicieni italieni reprezentat de P.Corsini, M.De Salvo, M.Migliorato, F.De Maria, G.Romeo, P.Bonansinga.

Începând cu anii '90, teoria hiperstructurilor devine o preocupare constantă şi pentru matematicienii din România, momentul hotărâtor fiind cel de al VI-lea Congres Internaţional de Hiperstructuri şi Aplicaţii, organizat în 1993, la Iaşi, de către Universitatea "Al.I.Cuza". Acest domeniu al algebrei moderne a prezentat şi prezintă un interes deosebit pentru cercetătorii români, dovada vie în acest sens fiind numeroasele lucrări ştiinţifice publicate în reviste de prestigiu naţionale şi internaţionale, participări la diverse conferinţe şi congrese, noi rezultate concretizate în teze de doctorat. Amintim pe M.Ştefănescu, I.Tofan, Ghe.Radu, V.Leoreanu, C.Volf, M.Gontineac, C.Pelea, M. şi C.Guţan, I.Cristea.

Până acum au fost găsite aplicaţii ale hipergrupurilor în diverse domenii, ca de exemplu în analiza sistemelor convexe, în teoria caracterelor de grupuri finite, în teoria codurilor şi criptografie, în teoria grafurilor şi a hipergrafurilor, în teoria mulţimilor fuzzy şi rough, în probabilităţi, relaţii binare, etnologie.

Primul capitol al lucrării este dedicat prezentării unor noţiuni şi rezultate importante din Teoria Hipergrupurilor, utilizate pe parcursul tezei. Este confirmat faptul că Teoria Hipergrupurilor este o extensie naturală, o generalizare a Teoriei Grupurilor. Plecând de la o mulţime nevidă H înzestrată cu o hiperoperaţie " $\circ$ ", care la două elemente $x, y \in H$ asociază o submulţime nevidă a lui H, notată prin hiperprodusul $x \circ y$, Marty introduce în [36] noţiunea de hipergrup. Analog grupurilor, sunt definite elementele identitate şi inversabile, noţiunile de subhipergrup, morfism de hipergrupuri, relaţii pe hipergrupuri, hipergrup factor. Proprietăţile hiperprodusului permit introducerea a diferite tipuri de subhipergrupuri: închise, ultraînchise, inversabile, părţi complete, legătura dintre acestea fiind stabilită prin Propoziţia 1.22. Cea mai importantă şi studiată relaţie pe un hipergrup este relaţia fundamentală β, cu ajutorul căreia se determină inima unui hipergrup, subhipergrupul care oferă cele mai multe informaţii despre structura hipergrupului dat. Prezentarea continuă cu introducerea, studiul proprietăţilor unor tipuri particulare de hipergrupuri, mai ales a inimii acestora şi determinarea legăturilor dintre ele; sunt analizate hipergrupurile regulate şi reversibile, cele canonice, complete, încheind cu join space-urile, hipergrupurile utilizate în: geometrie, combinatorică, teoria mulţimilor fuzzy şi rough, sisteme convexe, etc.

În finalul capitolului sunt reamintite o serie de rezultate din teoria join space-urilor, stabilite de Prenowitz şi Jantosciak în [43], folosite cu precădere în **Capitolul** 2, când sunt reconstruite, din punct de vedere algebric, cele trei ramuri ale geometriei: geometria proiectivă, sferică şi descriptivă. Fiecare dintre aceste geometrii poate fi caracterizată printr-o mulţime de puncte S şi o relaţie ternară (abc), citită "b este între a şi c", ce verifică o serie de axiome. Folosindu-se, eventual, de un punct ideal $e \notin S$, Prenowitz şi Jantosciak au definit pe mulţimea S, în cazul geometriei descriptive, şi respectiv pe noua mulţime $S' = S \cup \{e\}$, pentru celelalte două geometrii, câte o hiperoperaţie de uniune (Teorema 2.2 şi 2.3, Teorema 2.5 şi 2.6, Teorema 2.8), reuşind să caracterizeze geometriile date ca join space-uri particulare.

În **Capitolul 3** al tezei am descris trei tipuri de legături dintre hipergrupuri şi mulţimi fuzzy, ce conduc la obţinerea de noi join space-uri. Prima conexiune, considerată de Rosenfeld în 1971, a fost apoi extinsă de Ameri şi Zahedi în [1]. Dat un grup G şi o mulţime fuzzy μ a sa, se defineşte hiperoperaţia indusă de μ astfel:

$$\circ_\mu : G \times G \longrightarrow \mathcal{P}^*(G), a \circ_\mu \; b = \mu^a \mu^b.$$

Teorema 3.1.5 determină condiţiile în care noua hiperstructură obţinută este un hipergrup, un hipergrup canonic sau un join space.

În subcapitolul 3.2 sunt prezentate rezultatele obţinute de Corsini şi Leoreanu în [10], [11], [12], [14], [15] cu privire la join space-ul obţinut înzestrând o mulţime nevidă H cu hiperprodusul:

$$x \circ y = \{z \in H \mid \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \mu(z) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}\},$$

unde μ este o submulţime fuzzy a lui H. Sunt evidenţiate condiţii necesare şi suficiente pentru ca două join space-uri astfel obţinute asociate a două submulţimi fuzzy distincte definite pe acelaşi univers H să fie izomorfe (Teorema 3.2.2 şi Teorema 3.2.3).

O a treia conexiune între hipergrupuri şi mulţimi fuzzy a fost stabilită de Corsini în [17] şi studiată apoi de P.Corsini, M.Ştefănescu, V.Leoreanu, I.Cristea. Unui hipergrupoid $\langle H, \circ \rangle$ i se asociază mulţimea fuzzy $\widetilde{\mu}$ prin relaţiile (ω) din § 3.3.1 şi apoi join space-ul $\langle {}^1H, \circ_1 \rangle$, ca în conexiunea precedentă; folosind din nou construcţia din (ω) pentru hipergrupoidul $\langle {}^1H, \circ_1 \rangle$ se determină mulţimea fuzzy $\widetilde{\mu}_1$ şi, corespunzător, join space-ul $\langle {}^2H, \circ_2 \rangle$ şi aşa mai departe. Procedeul se opreşte când se obţin două join space-uri succesive identice sau izomorfe. În acest mod se construieşte o secvenţă de join space-uri şi mulţimi fuzzy $(\langle {}^iH, \circ_i \rangle, \widetilde{\mu}_i)_{i \geq 1}$ asociate lui H, a cărei lungime a fost numită gradul fuzzy al hipergrupoidului în discuţie. Pentru orice $i \geq 1$, există un r şi o partiţie $\pi = \{{}^iC_j\}_{j=1}^r$ a lui ${}^iH$ astfel încât $x, y \in {}^iC_j \iff \widetilde{\mu}_{i-1}(x) = \widetilde{\mu}_{i-1}(y)$. Notând $k_{j_l} =\mid {}^iC_{j_l} \mid$, $1 \leq l \leq r$, fiecărui join space ${}^iH$ i se asociază o r-uplă ordonată $(k_{j_1}, k_{j_2}, ..., k_{j_r})$. În particular, oricărui hipergrupoid H asociem o r-uplă ordonată $(k_1, k_2, ..., k_r)$. Studiind anumite tipuri de r-uple ordonate, am obţinut câteva rezultate referitoare la gradul fuzzy al unui hipergrupoid.

Dacă hipergrupoidului finit $H = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ i se poate asocia n-upla $(1, 1, ..., 1)$, putem construi cu uşurinţă, în funţie de paritatea lui n şi fără a calcula efectiv valorile $\widetilde{\mu}_1(a_i)$ după formulele (ω), join space-ul ${}^1H$ asociat. Mai mult, dacă $n+1 = 2^s$, am demonstrat că $s.f.g.(H) = s + 1$ (vezi Teorema 3.3.9). O consecinţă imediată şi importantă a acestui rezultat este dată de Corolarul 3.3.10: dat un număr natural $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ se poate construi un join space H de grad fuzzy n. Teorema 3.3.11 exprimă o condiţie suficientă, dar nu şi necesară, pentru ca două join space-uri succesive din secvenţă să nu fie izomorfe şi anume: dacă join space-ului ${}^iH$ i se asociază r-upla $(k_1, k_2, ..., k_r)$ cu proprietatea că $(k_1, k_2, ..., k_r) = (k_r, k_{r-1}, ..., k_1)$, atunci ${}^iH$ şi ${}^{i+1}H$ nu sunt izomorfe.

Una din clasele de hipergrupuri studiate în continuare este cea a hipergrupurilor complete finite, adică a hipergrupurilor H de tipul $H = \bigcup\limits_{g \in G} A_g$, unde

1) $(G, \circ)$ este un grup;

2) pentru orice $(g_1, g_2) \in G^2, g_1 \neq g_2$, avem $A_{g_1} \cap A_{g_2} = \emptyset$;

3) dacă $(a, b) \in A_{g_1} \times A_{g_2}$, atunci $a \circ b = A_{g_1 g_2}$.

Am arătat că pentru un hipergrup complet H de ordin n gradul său fuzzy depinde doar de m-descompunerile lui n. Teorema 3.3.16 determină toate hipergrupurile complete de ordin cel mult 6 şi, corespunzător, gradul lor fuzzy. Mai mult, orice hipergrup complet de ordin n este caracterizat de o m-uplă $[k_1, k_2, ..., k_m]$, unde $m = |G|$, $2 \leq m \leq n-1$, $G = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$, iar pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $k_i = |A_{g_i}|$.
Dacă H este un hipergrup complet de tipul $[\underbrace{p, p, ..., p}_{k \ \ ori}, kp]$, unde $n = |H| = 2kp$, atunci $s.f.g.(H)=2$ (Propoziţia 3.3.17); dacă este de tipul $[\underbrace{p, p, ..., p}_{s \ \ ori}, \underbrace{k, k, ..., k}_{t \ \ ori}, ps]$, cu $2 \leq p < k < ps$, $n = |H| = 2ps + kt$, atunci pentru $n = 4ps$, $s.f.g.(H) = 3$, iar pentru $kt \neq 2ps$, $f.g.(H) = 2$ (Propoziţia 3.3.18).

În continuare am dat un exemplu de un $1-$hipergrup de ordin n care nu este complet şi am calculat gradul său fuzzy în funcţie de valorile lui n.

O altă clasă de hipergrupuri analizată este cea a hipergrupurilor cu identităţi parţiale scalare (i.p.s.hipergrupuri); am determinat gradul fuzzy al tuturor i.p.s.hipergrupurilor de ordin mai mic decât 8 (Teorema 3.3.19).

Dată o relaţie de echivalenţă R pe un univers H, se poate defini o submulţime rough $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$, unde A este o submulţime nevidă a lui H, iar

$$\underline{R}(A) = \bigcup_{R(x) \subset A} R(x) \ \text{ şi } \ \overline{R}(A) = \bigcup_{R(x) \cap A \neq \emptyset} R(x).$$

Se cunoaşte că orice mulţime rough este mulţime fuzzy, dar reciproc nu ([2]).

Definind pe H hiperoperaţia:

$$\forall (x, y) \in H^2, x \circ y = \overline{R}(\{x, y\}) \setminus \underline{R}(\{x, y\})$$

se obţine că hipergrupoidul $\langle H, \circ \rangle$ este un join space dacă şi numai dacă pentru orice $x \in H$, $|R(x)| \geq 3$. Ataşând acestui join space submulţimea fuzzy $\widetilde{\mu}$ definită prin relaţiile (ω), am obţinut că, pentru orice două elemente distincte $u, v \in H$ are loc:

(i) $\widetilde{\mu}(u) = \widetilde{\mu}(v) \iff |R(u)| = |R(v)|$;

(ii) $\widetilde{\mu}(u) < \widetilde{\mu}(v) \iff |R(u)| > |R(v)|$.

Dacă R este o relaţie de echivalenţă pe H astfel încât $| \ R(x) \ | = k = const$, pentru orice $x \in H$, atunci $s.f.g.(H) = 1$.

În ultima parte a tezei am determinat câteva proprietăţi ale join space-urilor ${}^iH$ asociate unui hipergrupoid H, legate de relaţii fundamentale definite pe H. Primul rezultat stabileşte că inima oricărui join space asociat lui H coincide cu întreg hipergrupoidul. Pe lângă relaţia fundamentală β definită pe un hipergrupoid H, există alte 3 tipuri de relaţii de echivalenţă numite şi ele fundamentale şi introduse de Jantosciak în [29]: relaţia de operaţional echivalenţă, inseparabilitate şi cea de esenţial identitate. Cu ajutorul lor se defineşte noţiunea de hipergrup redus. Am arătat că pentru orice hipergrupoid H şi orice $i \geq 1$, hipergrupul factor ${}^iH/R_{\widetilde{\mu}_i}$ este redus (Teorema 3.3.26). Această proprietate nu se păstrează şi pentru join space-urile asociate ${}^iH$, mai exact, join space-ul ${}^1H$ este singurul join space din secvenţa $(\langle {}^iH, \circ_i \rangle, \widetilde{\mu}_i)_{i \geq 1}$ corespunzătoare lui H care poate fi un hipergrup redus, acest lucru având loc dacă şi numai dacă n-upla asociată lui H este de forma $(1, 1, ..., 1)$.

Concluzionând, lucrarea de faţă prezintă cele trei tipuri de legături stabilite până în prezent între hipergrupuri şi mulţimi fuzzy, studiind mai ales secvenţa de join space-uri obţinută print-o astfel de asociere. Au fost deschise noi direcţii de cercetare şi abordate o serie de probleme, unele dintre acestea rămânând nerezolvate; ele sunt subliniate în **Capitolul** 4 al tezei.

Capitolul 1

Noţiuni fundamentale din teoria hipergrupurilor

În acest capitol sunt prezentate noţiuni şi rezultate din teoria hipergrupurilor (vezi [4]) ce vor fi folosite pe parcursul tezei. Mai precis, definim noţiunile de hipergrup, subhipergrup, inima unui hipergrup, morfism de hipergrupuri; introducem diferite tipuri de relaţii pe hipergrupuri, diferite tipuri de hipergrupuri, indicând legăturile dintre acestea; încheiem cu câteva rezultate din teoria join space-urilor, utile în capitolul al doilea.

Fie H o mulţime nevidă şi $\mathcal{P}^*(H)$ mulţimea părţilor nevide ale lui H.

Definiţie 1.1. O mulţime H înzestrată cu o hiperoperaţie $\circ : H^2 \longrightarrow \mathcal{P}^*(H)$ se numeşte *hipergrupoid*. Imaginea perechii $(a, b) \in H^2$ se notează prin $a \circ b$ şi se numeşte *hiperprodusul* dintre a şi b.
Dacă A şi B sunt două submulţimi nevide ale lui H, atunci $A \circ B = \bigcup\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \circ b$.

Definiţie 1.2. Hipergrupoidul $\langle H, \circ \rangle$ se numeşte *semihipergrup* dacă hiperoperaţia " $\circ$ " este asociativă. Dacă H satisface *legea de reproductibilitate* :

$$\forall\, x \in H, H \circ x = x \circ H = H,$$

atunci H se numeşte *cuasihipergrup*.
Un *hipergrup* este un semihipergrup care este şi cuasihipergrup.

Definiţie 1.3. Fie $\langle H, \circ \rangle$ un hipergrupoid .

(i) Un element $e \in H$ se numeşte *identitate* a lui H dacă, pentru orice $x \in H$, $x \in x \circ e \bigcap e \circ x$.
O identitate e se numeşte *identitate scalară* dacă, pentru orice $x \in H$, are loc egalitatea $x \circ e = e \circ x = x$.
O identitate e se numeşte *identitate parţială* dacă, pentru orice $x \in H$, $x \in x \circ e$ sau $x \in e \circ x$.

(ii) Fie $e \in H$ o identitate pentru H. Un element $x' \in H$ se numeşte un *invers* al lui $x \in H$ dacă $e \in x \circ x' \bigcap x' \circ x$.

Notaţie. Pentru $a, b \in H$, notăm $a/b = \{x \mid a \in x \circ b\}$ şi $b \backslash a = \{y \mid a \in b \circ y\}$.
Dacă A şi B sunt submulţimi ale unui hipergrup H, notăm $A/B = \bigcup\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a/b$.

Morfismele de hipergrupuri reprezintă una dintre temele importante din teoria hipergrupurilor, de care s-au ocupat Ore, Dresher, Krasner, Koskas şi mai târziu Corsini, Comer, Jantosciak, Rossi, Bonansigna, Leoreanu.

Definiţie 1.4. Fie $\langle H, \circ\rangle$ şi $\langle K, \star\rangle$ doi hipergrupoizi şi $f : H \longrightarrow K$ o aplicaţie de la H în K. Spunem că:

(i) f este un *morfism* dacă pentru orice $(a, b) \in H^2, f(a \circ b) \subset f(a) \star f(b)$;

(ii) f este un *morfism bun* dacă pentru orice $(a, b) \in H^2, f(a \circ b) = f(a) \star f(b)$;

Relaţiile de echivalenţă definite pe un hipergrupoid H constituie o parte principală din teoria hipergrupurilor. În continuare prezentăm câteva rezultate în această direcţie, insistând asupra relaţiei fundamentale β, cu ajutorul căreia se defineţe inima unui hipergrup, noţiune studiată de către Corsini, Orsatti şi cu precădere de Leoreanu în [35], unde determină structura inimii unui join space.

Definiţie 1.5. Fie $\langle H, \circ\rangle$ un hipergrupoid şi fie ρ o relaţie de echivalenţă pe H.

(i) Spunem că ρ este *regulată la dreapta* dacă are loc următoarea implicaţie:

$$\begin{aligned} a\rho b \Longrightarrow & \forall\, u \in H, \forall\, x \in a \circ u, \exists y \in b \circ u : x\rho y \quad \text{şi} \\ & \forall\, \bar{y} \in b \circ u, \exists \bar{x} \in a \circ u : \bar{x}\rho\bar{y}. \end{aligned}$$

Similar se defineşte *regularitatea la stânga.*
Spunem că ρ este *regulată* dacă este regulată şi la dreapta şi la stânga.

(ii) Spunem că ρ este *tare regulată la dreapta* dacă are loc următoarea implicaţie:

$$a\rho b \Longrightarrow \forall\, u \in H, \forall\, x \in a \circ u, \forall\, y \in b \circ u : x\rho y.$$

Similar se defineşte *regularitatea tare la stânga.*
Spunem că ρ este *tare regulată* dacă este tare regulată şi la dreapta şi la stânga.

Definiţie 1.6. Fie $\langle H, \circ\rangle$ un hipergrupoid. Definim pe H relaţia β astfel:

$$a\beta b \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_1, x_2, ..., x_n) \in H^n : a \in \prod_{i=1}^{n} x_i \ni b.$$

Se observă că β este o relaţie reflexivă şi simetrică, dar în general, nu este tranzitivă. Notăm prin β^* închiderea tranzitivă a relaţiei β.

Teoremă 1.7. *Dacă $\langle H, \circ\rangle$ este un hipergrupoid, atunci β^* este cea mai mică (în raport cu incluziunea) relaţie de echivalenţă tare regulată pe H. În plus, dacă H este un hipergrup, atunci $\beta^* = \beta$.*

Definiţie 1.8. Pentru orice relaţie de echivalenţă ρ definită pe un hipergrupoid H şi orice element $x \in H$, definim clasa de echivalenţă a lui x în raport cu ρ prin $\bar{x} = \{y \in H \mid x\rho y\}$; notăm cu H/ρ mulţimea tuturor claselor de echivalenţă ale elementelor lui H, numită *mulţime factor.*

Propoziţie 1.9. *Fie $\langle H, \circ\rangle$ un semihipergrup şi ρ o relaţie de echivalenţă pe H.*

(i) *Dacă ρ este regulată, atunci H/ρ este un semihipergrup, cu hiperoperaţia:*

$$\forall\, (\bar{x}, \bar{y}) \in (H/\rho)^2, \bar{x} \otimes \bar{y} = \{\bar{z} \mid z \in x \circ y\}.$$

(ii) *Invers, dacă hiperoperaţia "$\otimes$" este bine definită pe H/ρ, atunci ρ este o relaţie regulată.*

Propoziţie 1.10. *Fie $\langle H, \circ \rangle$ un hipergrup şi ρ o relaţie de echivalenţă tare regulată pe H. Atunci H/ρ este un grup.*

Definiţie 1.11. Fie H un hipergrup, 1 elementul identitate din grupul H/β, iar $\varphi_H : H \longrightarrow H/\beta$ proiecţia canonică: pentru orice $x \in H$, $\varphi_H(x) = \bar{x}$.
Se defineşte *inima* hipergrupului H astfel: $\omega_H = \{x \in H \mid \varphi_H(x) = 1\}$.

Părţile complete de hipergrupuri, introduse şi studiate pentru prima dată de Koskas, au fost ulterior analizate de Corsini şi Sureau în special în contextul general al teoriei hipergrupurilor, iar De Salvo le-a studiat din punct de vedere combinatorial.

Definiţie 1.12. Fie $\langle H, \circ \rangle$ un semihipergrup şi A o submulţime nevidă a lui H. Spunem că A este o *parte completă* a lui H dacă

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, (x_1, ..., x_n) \in H^n, \prod_{i=1}^{n} x_i \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \subset A.$$

Propoziţie 1.13. *Orice intersecţie de părţi complete ale unui hipergrup H este o parte completă a lui H.*

Definiţie 1.14. Dacă $\langle H, \circ \rangle$ este un semihipergrup şi $A \subset H$, $A \neq \emptyset$, atunci *închiderea completă a lui A în H* este intersecţia tuturor părţilor complete ale lui H, care conţin pe A. Se notează prin $\mathcal{C}(A)$.

Propoziţie 1.15. *Fie $\langle H, \circ \rangle$ un semihipergrup.*

(i) *Relaţia ρ definită prin $a\rho b \Longleftrightarrow x \in \mathcal{C}(\{y\})$ este o echivalenţă pe H.*

(ii) *Pentru orice $(a, b) \in H^2$ avem $a\rho b \Longleftrightarrow a\beta^* b$.*

(iii) *Dacă A este o submulţime nevidă a lui $\langle H, \circ \rangle$, atunci $\mathcal{C}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathcal{C}(a)$.*

Definiţie 1.16. Un semihipergrup $\langle H, \circ \rangle$ se numeşte *complet* dacă pentru orice $(x, y) \in H^2$, $\mathcal{C}(x \circ y) = x \circ y$.

Teoremă 1.17. *Un hipergrup H este complet dacă $H = \bigcup_{g \in G} A_g$, unde*

1) *$(G, \circ)$ este un grup;*

2) *pentru orice $(g_1, g_2) \in G^2, g_1 \neq g_2$, avem $A_{g_1} \cap A_{g_2} = \emptyset$;*

3) *dacă $(a, b) \in A_{g_1} \times A_{g_2}$, atunci $a \circ b = A_{g_1 g_2}$.*

Definiţie 1.18. Fie $\langle H, \circ \rangle$ un hipergrupoid şi K o submulţime nevidă a lui H. K se numeşte un *subhipergrupoid* al lui H dacă $K \circ K \subset K$. Un subhipergrupoid K al lui H se numeşte *subhipergrup* al lui H dacă $\langle K, \circ \rangle$ este un hipergrup .

Definiţie 1.19. Fie $\langle H, \circ \rangle$ un hipergrup şi K un subhipergrup al său.

(i) K este *închis la stânga* în H dacă pentru orice $a \in H$ şi $(x, y) \in K^2$, din $x \in a \circ y$ rezultă $a \in K$. Analog, se defineşte noţiunea de *subhipergrup închis la dreapta*. K este *închis* în H dacă este închis atât la dreapta cât şi la stânga.

(ii) K este *ultraînchis la stânga* în H dacă pentru orice $x \in H$ are loc: $K \circ x \cap (H \backslash K) \circ x \neq \emptyset$. Analog, se defineşte noţiunea de *subhipergrup ultraînchis la dreapta.* Subhipergrupul K este *ultraînchis* în H dacă este ultraînchis şi la stânga şi la dreapta.

(iii) K este *inversabil la stânga* în H dacă pentru orice $(x, y) \in H^2$, are loc implicaţia: $y \in K \circ x \Longrightarrow x \in K \circ y$. Similar, definim *inversabilitatea la dreapta.* Spunem că subhipergrupul K este *inversabil* dacă este inversabil şi la dreapta şi la stânga.

Hipergrupurile regulate au fost introduse de către Dresher şi Ore în 1938 (vezi [24]), investigate apoi de Corsini şi Orsatti, care determină inima unui hipergrup regulat şi reversibil.

Definiţie 1.20. Un hipergrup H este *regulat* dacă are cel puţin o identitate şi fiecare element are cel puţin un invers. Un hipergrup regulat $\langle H, \circ \rangle$ se numeşte *reversibil* dacă pentru orice $(x, y, a) \in H^3$, satisface următoarele condiţii:

1) dacă $y \in a \circ x$, atunci există un invers a' al lui a, astfel încât $x \in a' \circ y$;

2) dacă $y \in x \circ a$, atunci există un invers a'' al lui a, astfel încât $x \in y \circ a''$.

Teoremă 1.21.

(i) *Orice hipergrup complet este regulat şi reversibil.*

(ii) *Inima unui hipergrup complet H este formată din toate identităţile lui H.*

În 1975, Roth ulilizează hipergrupurile canonice în demonstrarea unor teoreme din teoria caracterelor grupurilor finite (vezi [49]). McMullen şi Price au folosit generalizări ale hipergrupurilor canonice în analiza armonică şi în fizica particolelor.

Definiţie 1.22. Spunem că un hipergrup H este *canonic* dacă

(i) este comutativ;

(ii) are o identitate scalară;

(iii) orice element are un unic invers;

(iv) este reversibil.

Definiţie 1.23. Un hipergrup canonic $\langle H, + \rangle$ se numeşte *tare canonic* dacă satisface condiţiile:

(i) $\forall (x, a) \in H^2, x \in x + a \Longrightarrow x = x + a$;

(ii) $(x + y) \cap (z + w) \neq \emptyset \Longrightarrow x + y \subset z + w$ or $z + w \subset x + y$.

Noţiunea de join space a fost introdusă de către Prenowitz care împreună cu Jantosciak a reconstruit, pe cale algebrică, trei ramuri ale geometriei: geometria proiectivă, sferică şi descriptivă. Acest argument este tratat în al doilea capitol al acestei teze.

Definiţie 1.24. Un hipergrup comutativ $\langle H, \circ \rangle$ se numeşte *join space* dacă pentru orice $(a, b, c, d) \in H^4$, are loc următoarea implicaţie:

$$a/b \cap c/d \neq \emptyset \Longrightarrow a \circ d \cap b \circ c \neq \emptyset.$$

Propoziţie 1.25.

(i) *Un hipergrup este canonic dacă şi numai dacă este un join space cu o identitate scalară.*

(ii) *Orice hipergrup complet comutativ este un join space.*

Exemple de hipergrupuri:

1. Fie G un grup; pentru orice $(x, y) \in G^2$, definim $x \circ y = \langle x, y \rangle$ subgrupul lui G generat de x şi y. Atunci $\langle G; \circ \rangle$ este un hipergrup.

2. Fie A o mulţime nevidă şi pentru orice $x, y \in A$, $x \circ y = A$. Hipergrupul $\langle A; \circ \rangle$ se numeşte hipergrupul total pe A.

3. Fie G un grup şi H un subgrup normal al lui G. Definim pe G hiperoperaţia $x \circ y = Hxy$ şi obţinem că $\langle H, \circ \rangle$ este un hipergrup.

4. Fie $\langle G, + \rangle$ un grup abelian, α un element de ordin 2 al lui G. Pentru orice $x, y \in G$ definim $x \circ y = \{x + y, x + y + \alpha\}$. Obţinem că $\langle G; \circ \rangle$ este un hipergrup complet.

5. Fie $H_n = A \bigcup B \bigcup \{e\}$, unde $|A| \geq 2 \leq |B|$, $A \cap B = \emptyset$, $e \notin A \bigcup B$. Fixăm un element $b_1 \in B$ şi definim următoarea hiperoperaţie pe H_n: $\forall a \in A, a \circ a = b_1$; $\forall (a_1, a_2) \in A^2, a_1 \neq a_2, a_1 \circ a_2 = B$; $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \circ b = b \circ a = e$; $\forall (b, b') \in B^2, b \circ b' = A$; $\forall a \in A, a \circ e = e \circ a = A$; $\forall b \in B, b \circ e = e \circ b = B$; $e \circ e = e$. H_n este un 1-hypergroup care nu e complet.

6. Orice hipergrup comutativ înzestrat cu o identitate este regulat.

În continuare prezentăm câteva rezultate din teoria join space-urilor introduse de Prenowitz şi Jantosciak în [43].

Fie H un join space şi N o submulţime nevidă a sa.

Propoziţie 1.26. *Orice intersecţie de subhipergrupuri închise ale unui hipergrup H este subhipergrup închis al lui H.*

Definiţie 1.27. *Subhipergrupul închis generat de N*, notat $\langle N \rangle$, este cel mai mic subhipergrup închis al lui H ce conţine pe N, adică este intersecţia tuturor subhipergrupurilor lui H conţinând N.

Se introduce pe H o relaţie de congruenţă în raport cu un subhipergrup închis N al lui H, cu scopul de a construi un nou join space, anume spaţiul factor al lui H prin N.

Definiţie 1.28. Fie N un subhipergrup închis nevid al unui join space H. Fie $a, b \in H$. Atunci $a \equiv b(modN)$ (citim *a este congruent cu b modulo N*), dacă $aN \cap bN \neq \emptyset$. Relaţia $\equiv (modN)$ este o relaţie de echivalenţă pe H şi $(a)_N$ reprezintă clasa de echivalenţă a lui a în H.
Relaţia $\equiv (modN)$ poate fi extinsă la o relaţie pe submulţimile lui H astfel:
$A \equiv B(modN)$ înseamnă că pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $a \equiv b(modN)$ şi invers.

Pe mulţimea factor $H : N = \{(x)_N \mid x \in H\}$ formată din clasele de echivalenţă în raport cu N determinate de elementele lui H, definim uniunea dintre două clase $(a)_N, (b)_N$ prin $(a)_N \odot (b)_N = \{(x)_N \mid x \in a \circ b\}$. Atunci $(H : N, \odot)$ este un join space cu identitatea N, numit *spaţiul factor* H modulo N. *Ordinul* lui $H : N$ reprezintă cardinalul mulţimii $H : N$.

Definiţie 1.29. Dacă A şi B sunt două subhipergrupuri închise ale unui join space $\langle H, \circ \rangle$ astfel încât $B \subset A$ şi ordinul lui $A : B$ este 3, atunci spunem că B *separă* A.

Definiţie 1.30. Dacă join space-ul H are o identitate scalară e, notăm $E = \{e\}$, altfel $E = \emptyset$. Definim $\triangleleft\emptyset\triangleright = E$ şi dacă $A \in \mathcal{P}^*(H), \triangleleft A\triangleright = \langle A \rangle$.
Un join space H se numeşte un *exchange space* dacă:

(I) pentru $a \in \triangleleft b\triangleright, a \notin E$, avem $\triangleleft a\triangleright = \triangleleft b\triangleright$;

(II) pentru $c \in \triangleleft a, b\triangleright$ şi $c \notin \triangleleft b\triangleright$, avem $\triangleleft c, b\triangleright = \triangleleft a, b\triangleright$.

Propoziţie 1.31. *Fie H un join space cu o identitate scalară e. Atunci H satisface* (I) *dacă şi numai dacă satisface* (II).

Definiţie 1.32. O submulţime B a unui subhipergrup închis N al unui exchange space H se numeşte *bază* a lui N dacă este independentă şi $\langle B \rangle = N$.

Orice subhipergrup închis al unui exchange space are o bază.

Orice două baze ale lui N au acelaşi cardinal numit *dimensiunea* lui N, notat prin $d(N)$.

Dacă N şi M sunt subhipergrupuri închise finit dimensionale ale lui $\langle H, \circ \rangle$ astfel încât $N \cap M \neq \emptyset$ atunci are loc *identitatea dimensională*:

$$d(\langle N, M \rangle) + d(N \cap M) = d(N) + d(M).$$

Dacă N acoperă M, atunci $d(N) = d(M) + 1$.

Dacă $d(N) = n$ este un număr finit, orice submulţime independentă de n elemente a lui N constituie o bază pentru N.

Capitolul 2

Geometrii şi join space-uri

Una din temele majore ale teoriei hipergrupurilor este aceea de a construi noi hipergrupuri şi de a găsi condiţii necesare şi suficiente pentru ca acestea să fie join space-uri. O astfel de construcţie este studiată şi în lucrarea de faţă, de aceea în Capitolul 2 al tezei am prezentat contextul în care a apărut conceptul de join space.

Noţiunea de join space a fost introdusă şi studiată pentru prima dată de Prenowitz. Mai târziu, împreună cu Jantosciak, a reconstruit, din punct de vedere algebric, trei ramuri ale geometriei: geometria proiectivă, descriptivă şi sferică (vezi [43], [44], [45], [46]). În fiecare dintre aceste trei geometrii rolul central este jucat de o operaţie de uniune numită "join", care, la două puncte distincte asociază un segment, în cazul geometriei descriptive, arcul mic de pe cercul mare ce trece prin cele două puncte, în cazul geometriei sferice şi respectiv, în cazul proiectiv, o dreaptă. Chiar dacă studiul algebric în cele trei cazuri este asemănător, nu putem face o dezvoltare uniformă şi unitară a celor trei teorii.

1. Geometria proiectivă este o geometrie non-Euclidiană care s-a dezvoltat la începutul secolului al nouăsprezecelea, bazată pe un principiu fundamental, acela că dreptele paralele se intâlnesc la infinit. Este geometria proprietăţilor ce rămân invariante la proiecţii. Veblen şi Young, în lucrarea "Projective Geometry", vol.1, Boston, (1910), consideră ca noţiuni primare "punctul" şi "dreapta".

Definiţie 2.1. O *geometrie proiectivă* este postulată ca un sistem (S,T) format dintr-o mulţime S de puncte şi o mulţime T de drepte care verifică axiomele:

(P1) O dreaptă este o mulţime de puncte şi conţine cel puţin trei puncte.

(P2) Două puncte a, b, $a \neq b$, sunt conţinute într-o unică dreaptă, notată $L(ab)$.

(P3) Dacă a, b, c, d sunt puncte distincte şi $L(ab) \bigcap L(cd) \neq \emptyset$, atunci $L(ac) \bigcap L(bd) \neq \emptyset$.

Fie $S' = S \bigcup \{e\}$, unde $e \notin S$ se numeşte punct ideal.

Pentru $T \neq \emptyset$, definim pe S' hiperoperaţia de uniune " $\cdot$ " astfel:

1) dacă $a, b \in S$, $\quad a \neq b$, atunci $a \cdot b = L(ab) \setminus \{a, b\}$;

2) fie $a \in S$; dacă există o dreaptă în T care conţine exact trei puncte, atunci $a \cdot a = e$; altfel $a \cdot a = \{a, e\}$;

3) dacă $a \in S'$, atunci $e \cdot a = a \cdot e = a$.

Presupunem $T = \emptyset$ şi $S = \{a\}$. Definim două hiperoperaţii pe S' (pentru amândouă e reprezintă un element identitate): $a \cdot a = \{e\}$ sau $a \cdot a = \{e, a\}$.

Pentru $T = \emptyset$ şi $S = \emptyset$ definim $e \cdot e = e$.

Se arată că sistemul $(S', \cdot)$ este un join space cu element identitate e, numit *join space-ul asociat geometriei proiective* (S,T).

Teoremă 2.2. *Fie $\langle J, \cdot \rangle$ un join space cu element identitate e. Atunci $\langle J, \cdot \rangle$ este un join space asociat unei geometrii proiective dacă şi numai dacă, pentru orice $a \in J \setminus \{e\}$, cardinalul subhipergrupului închis $\langle a \rangle$ generat de a este* 2.

2. Geometria sferică este geometria suprafeţei bidimensionale a unei sfere. Este un exemplu de geometrie non-Euclidiană, modelul cel mai simplu de geometrie eliptică, în care print-un punct exterior unei drepte date nu trece nici o dreaptă paralelă cu ea.

Definiţie 2.3. O *geometrie sferică* este un sistem $(S, (abc))$ format dintr-o mulţime S de puncte şi o relaţie ternară (abc), citită *b este între a şi c*, care satisface axiomel:

(S1) Dacă (abc) atunci a, b, c sunt distincte.

(S2) Dacă (abc) atunci (cba).

(S3) Pentru fiecare a există un unic a' (numit *opusul* lui a) astfel încât $a' \neq a$ şi (axy) implică (xya').

(S4) Dacă $b \neq a, \quad b \neq a'$, există x astfel încât (axb).

Dacă $b \neq a, b \neq a'$, definim $a \cdot b = \{x \mid (axb)\}$, $a \cdot a = a$. Hiperoperaţia " $\cdot$ " este definită parţial pe S.

(S5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, când ambii termeni sunt bine definiţi.

Rămâne nerezolvată problema extinderii definiţiei hiperoperaţiei de uniune dintre două puncte a, a' diametral opuse, astfel încât să se păstreze proprietatea de asociativitate. Prenowitz în [46] a arătat că este imposibil de realizat acest lucru, cu excepţia cazului banal. De aceea, pentru a converti o geometrie sferică $(S, (abc))$ într-un join space $(S, \cdot)$, a apelat la un punct ideal e.

Se consideră $S' = S \bigcup \{e\}$, $e \notin S$ şi se defineşte pe S' hiperoperaţia " $\cdot$ " astfel: $a \cdot a' = \{a, a', e\}, \forall\, a \in S$, $a \cdot e = e \cdot a = a$, $\forall\, a \in S'$. Analog se arată că sistemul $(S', \cdot)$ este un join space cu element identitate e, numit *join space-ul asociat geometriei sferice S*.

Teoremă 2.4. *Fie S un join space idempotent ce admite un element identitate e (adică un hipergrup regulat idempotent). Atunci S este join space-ul asociat unei geometrii sferice dacă şi numai dacă, pentru orice $a \in S \setminus \{e\}$, cardinalul subhipergrupului închis $\langle a \rangle$ generat de a este* 3.

3. Geometria descriptivă, introdusă de Gaspard Monge in 1795, este o ramură a geometriei ce se ocupă cu studiul reprezentării bidimensionale a obiectelor tridimensionale.

Definiţie 2.7. O *geometrie descriptivă* este reprezentată printr-un sistem $(S, (abc))$, în care S este o mulţime de elemente, numite *puncte*, şi o relaţie ternară (abc) pe S numită *a fi între*, care verifică următoarele axiome:

(D1) Dacă a, b, c sunt trei puncte în relaţia (abc), atunci a, b, c sunt distincte.

(D2) Dacă punctele a, b, c sunt în relaţia (abc), atunci relaţia (bca) este falsă.

Pentru două puncte a, b, $(a \neq b)$, mulţimea formată din a, b şi punctele x cu proprietatea că (xab) sau (axb) sau (abx) se numeşte *dreapta ab*. Mulţimea punctelor x pentru care se verifică relaţia (axb) se numeşte *segmentul ab*.

(D3) Dacă c, d, $(c \neq d)$, sunt puncte ale dreptei ab, atunci a este un punct al dreptei cd.

(D4) Pentru orice două puncte a, b, $(a \neq b)$, există cel puţin un punct c astfel încât (abc).

(D5) Există trei puncte necoliniare.

(D6) (Axioma transversalei) Dacă a, b, c sunt puncte distincte şi a nu aparţine dreptei bc, iar pentru punctele d, e au loc relaţiile (bcd) şi (cea), atunci există un punct f pe dreapta de astfel încât (afb).

O hiperoperaţie de uniune pe S este definită prin: $a \cdot b = \{x \mid (axb)\}$, pentru $a \neq b$ şi $a \cdot a = a$, iar hiperoperaţia de extensie a lui a prin b astfel: $a/b = \{x \mid a \in x \cdot b\}$.
$(S, \cdot)$ este un join space, numit *join space-ul asociat* geometriei descriptive date.

Definiţie 2.8. Fie N şi K două subhipergrupuri ale unui join space H astfel încât K este o submulţime proprie maximală a lui N. Atunci spunem că N *acoperă* K.

Teoremă 2.9. *O geometrie descriptivă este caracterizată ca un join space ce satisface condiţiile:*

(J0) *pentru orice* $a \in J$, $a \cdot a = a/a = a$;

(J1) *dacă* $(a, b) \in J^2$, $a \neq b$, *atunci* $\langle a, b \rangle$ *acoperă* $\langle a \rangle$;

(J2) *există* A *şi* B, *două subhpergrupuri închise ale lui* $(J, \cdot)$ *asfel încât* $B \subset A$ *şi spaţiul factor* $(A : B)$ *are ordinul* 3;

(J3) $d(J) > 2$ *(ceea ce înseamnă că* J *conţine o submulţine de trei elemente independente).*

Capitolul 3

Hipergrupuri şi mulţimi fuzzy

În ultimile decenii au fost stabilite legături între hipergrupuri şi mulţimi fuzzy cu scopul de a obţine noi structuri algebrice, conexiuni studiate din punct de vedere teoretic, dar şi pentru aplicaţiile obţinute în diverse domenii, ca de exemplu teoria grafurilor, a spaţiilor probabilistice.

Conceptele "fuzzy" ("neclare", "nuanţate") derivă din numeroasele fenomene fuzzy prezente în natură şi în viaţa noastră. Spre exemplu, ploaia este un fenomen natural comun, care nu poate fi descris cu precizie, pentru că poate ploua cu diferite intensităţi: de la un picurat până la o ploaie torenţială. Dar fenomenul poate fi bine caracterizat printr-o funcţie care asociază fiecărui tip de ploaie un număr real din intervalul închis $[0, 1]$: dacă nu plouă funcţia ia valoarea 0 şi cu cât ploaia creşte în intensitate, cu atât valoarea funcţiei creşte, apropiindu-se de valoarea maximă 1.

Conceptul de mulţime fuzzy a fost introdus de Zadeh în 1965 (vezi [58]), când a propus ideea de o logică multivalentă, care să extindă conceptul tradiţional de logică bivalentă, ce devine un caz particolar al acestei noi teorii. Teoria mulţimilor fuzzy se bazează pe ceea ce Zadeh numea "principiul de incompatibilitate", adică "cu cât un fenomen vine studiat mai de aproape, cu atât definiţia sa devine mai neclară".

În general, o submulţime fuzzy a unui univers arbitrar X se defineşte printr-o funcţie $\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$, unde A este o submulţime nevidă a lui X. Pentru orice element $x \in X$, valoarea funcţiei $\mu_A(x)$ se numeşte gradul de apartenenţă al lui x la A. Când A este o mulţime în sens clasic, atunci $\mu_A(x) = 0$, dacă $x \notin A$ şi $\mu_A(x) = 1$, dacă $x \in A$, adică μ_A este funcţia caracteristică a mulţimii A.

3.1 Subgrupul fuzzy al unui grup

De când a fost introdus conceptul de mulţime fuzzy, au fost extinse şi generalizate o serie de noţiuni, înlocuind mulţimile clasice cu mulţimile fuzzy. Prima conexiune dintre mulţimile fuzzy şi structurile algebrice a fost considerată de Rosenfeld în 1971 (vezi [48]), când a definit noţiunea de subgrup fuzzy al unui grup $(G, \cdot)$, cu aplicaţii în matematica economică (vezi [3]). Mai târziu, Ameri şi Zahedi au extins această asociere pentru a construi o nouă hiperstructură $\langle G, \circ_\mu \rangle$, care în anumite condiţii este un hipergrup, sau, chiar mai mult, un join space (vezi [1]).

Definiţie 3.1.1. Fie $\langle G, \cdot \rangle$ un grupoid şi μ o submulţime fuzzy a lui G. Atunci μ se numeşte *subgrupoid fuzzy* al lui G dacă

$$\forall\, x, y \in G, \mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}.$$

Dacă în plus, $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x), \forall\, x \in G$, atunci μ se numeşte *subgrup fuzzy* al lui G.

Pentru o mulţime nevidă X, notăm $FS(X) = \{\mu{:}X \longrightarrow [0, 1], \mu \neq 0\}$, mulţimea tuturor submulţimilor fuzzy (nenule) ale lui X.

Propoziţie 3.1.2. *μ este un subgrup fuzzy al lui G dacă şi numai dacă*

$$\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \forall\, x, y \in G.$$

Definiţie 3.1.3. $\mu \in FS(G)$ se numeşte

(i) *simetrică* dacă $\mu(x) = \mu(x^{-1}), \forall x \in G$;

(ii) *invariantă* dacă $\mu(xy) = \mu(yx), \forall x, y \in G$;

(iii) *subnormală* dacă este şi simetrică şi invariantă.

Definiţie 3.1.4. Fie $\mu \in FS(G)$ şi $x \in G$. Atunci *clasa fuzzy la stânga*, notată $x\mu \in FS(G)$, a lui μ se defineşte prin $(x\mu)(g) = \mu(x^{-1}g), \forall g \in G$.
Analog, *clasa fuzzy la dreapta*, notată $\mu x \in FS(G)$ a lui μ este definită prin relaţia $(\mu x)(g) = \mu(gx^{-1}), \forall g \in G$.

Notaţii. Fie $\mu \in FS(G)$ şi $a, b \in G$. Notăm
${}^a\mu = \{x \in G \mid x\mu = a\mu\}$

$\mu^a = \{x \in G \mid \mu x = \mu a\}$

$a\mu^e = \{ax \mid x \in \mu^e\}$

$\mu^a\mu^b = \{xy \mid x \in \mu^a, y \in \mu^b\}$.

Dacă μ este invariantă, atunci ${}^a\mu = \mu^a$, pentru orice $a \in G$.

Fie $\langle G, \cdot\rangle$ un grup şi $\mu \in FS(G)$. Definim hiperoperaţia

$$\circ_\mu : G \times G \longrightarrow \mathcal{P}^*(G), a \circ_\mu\ b = \mu^a\mu^b$$

numită *hiperoperaţia indusă* de μ.

Următorul rezultat determină condiţiile în care hipergrupoidul $\langle G, \circ_\mu\rangle$ este hipergrup, hipergrup canonic, join space.

Teoremă 3.1.5.

(i) *Fie $\mu \in FS(G)$. Atunci $\langle G, \circ_\mu\rangle$ este un cuasihipergrup.*

(ii) *Dacă $\mu \in FS(G)$ este subnormală, atunci $\langle G, \circ_\mu\rangle$ este un hipergrup.*

(iii) *Dacă $\mu \in FS(G)$ este subnormală, atunci $\langle G, \circ_\mu\rangle$ este un hipergrup canonic. Mai mult, există un morfism bun între $\langle G, \cdot\rangle$ şi $\langle G, \circ_\mu\rangle$.*

(iv) *Fie $\mu \in FS(G)$ subnormală şi $[G, G]$ subgrupul comutator al lui G. Atunci $\langle G, \circ_\mu\rangle$ este un join space dacă şi numai dacă $[G, G] \subseteq \mu^e$.*

3.2 Asocierea clasică dintre mulţimi fuzzy şi hipergrupuri

O nouă conexiune dintre hipergrupuri şi mulţimi fuzzy a fost stabilită de Corsini în [10], proprietăţile acesteia fiind studiate ulterior de Corsini şi Leoreanu (vezi [11], [12], [14]).

Fie $\mu : H \longrightarrow I$ o funcţie de la mulţimea nevidă H la intervalul închis $I = [0, 1]$, adică $\langle H; \mu\rangle$ este o submulţime fuzzy. Definim pe H următoarea hiperoperaţie: pentru orice $(x, y) \in H^2$,

$$x \circ y = y \circ x = \{z \in H \mid \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \mu(z) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}\}.$$

Teoremă 3.2.1. *Hipergrupoidul* $\langle H, \circ \rangle$ *este un join space.*

În continuare prezentăm o condiţie necesară şi suficientă pentru ca două join space-uri asociate a două submulţimi fuzzy distincte definite pe acelaşi univers H să fie izomorfe.

Studiem mai întâi cazul unui univers finit.

Fie $H = I(n) = \{1, 2, ..., n\}$ şi μ_A o submulţime fuzzy a lui H. Definim pe H următoarea relaţie de echivalenţă

$$u \sim_A v \text{ dacă şi numai dacă } \mu_A(u) = \mu_A(v).$$

Fie $H' = H/\sim_A$, $H' = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, ..., \bar{h}_s\}$; ordonăm H' astfel încât

I) $\forall (h, k) \in H^2, \bar{h} < \bar{k}$ dacă şi numai dacă $\mu_A(h) < \mu_A(k)$.

Fie $\lambda(\mu_A)$ partiţia ordonată a lui n în s părţi definită astfel:

II) $\forall (\bar{h}_1, \bar{h}_2, ..., \bar{h}_s) \in H'^s, \lambda(\mu_A) = (a_1, a_2, ..., a_s)$ dacă şi numai dacă $\forall\, i$,
$a_i = \mid \mu_A^{-1}(\mu_A(h_i) \mid$ şi $\forall (i, j) \in I(s) \times I(s)$ cu $i \neq j, i < j \Longrightarrow \bar{h}_i < \bar{h}_j$.

Evident $\sum_{i=1}^{s} a_i = n$ şi $\forall\, i, a_i \geq 1$.
Considerăm $(a_1, a_2, ..., a_s)$ o partiţie ordonată a lui n în s părţi şi

III) $\psi(a_1, a_2, ..., a_s) = (b_1, b_2, ..., b_s)$ unde, pentru orice $i, 1 \leq i \leq s$,
$b_i = a_{s-i+1}$.

Teoremă 3.2.2. *Dacă* μ_A, μ_B *sunt două submulţimi fuzzy pe un univers finit* H*, atunci join space-urile* $\langle H; \circ_A \rangle$ *şi* $\langle H; \circ_B \rangle$ *sunt izomorfe dacă şi numai dacă* $\lambda(\mu_A) = \lambda(\mu_B)$ *sau* $\lambda(\mu_B) = \psi(\lambda(\mu_A))$*, unde* $H/\sim_A = \{H_i \mid i \in I\}$, $H/\sim_B = \{H'_{i'} \mid i' \in I'\}$.

Generalizând rezultatul pentru un univers oarecare obţinem

Teoremă 3.2.3. *Dacă* μ_A, μ_B *sunt submulţimi fuzzy pe un univers* H*, atunci join space-urile* $\langle H; \circ_A \rangle$ *şi* $\langle H; \circ_B \rangle$ *sunt izomorfe dacă şi numai dacă există o funcţie strict monotonă şi bijectivă* $\varphi : I \longrightarrow I'$ *astfel încât, pentru orice* $i \in I, a_i = a'_{\varphi(i)}$*, unde* $H/\sim_A = \{H_i \mid i \in I\}$, $H/\sim_B = \{H'_{i'} \mid i' \in I'\}$.

3.3 Secvenţa de join space-uri asociate unui hipergrupoid

O a treia conexiune între clasa hipergrupurilor şi cea a mulţimilor fuzzy a fost stabilită de Corsini în [18] şi studiul ei reprezintă scopul acestei lucrări.

Fiecărui hipergrup H i se poate asocia o secvenţă de submulţimi fuzzy şi de join space-uri, secvenţă studiată de Ştefănescu, Corsini, Cristea şi Leoreanu în câteva cazuri particulare: pentru i.p.s. hipergrupuri, 1-hipergrupuri, hipergrupuri complete finite sau pentru hipergrupuri dotate cu o submulţime rough.

3.3.1 Construcţia secvenţei de join space-uri şi mulţimi fuzzy

Fie $\langle H, \circ \rangle$ un hipergrupoid.

Pentru orice $(x, y) \in H^2$ şi orice $u \in H$ considerăm

$$(\omega)\qquad \begin{aligned} &\mu_{x,y}(u) = 0 && \text{dacă } u \notin x \circ y \\ &\mu_{x,y}(u) = \frac{1}{|x \circ y|} && \text{dacă } u \in x \circ y \\ &A(u) = \sum_{(x,y) \in H^2} \mu_{x,y}(u) \\ &Q(u) = \{(a,b) \in H^2 \mid u \in a \circ b\} \\ &q(u) = |Q(u)| \\ &\widetilde{\mu}(u) = A(u)/q(u). \end{aligned}$$

Asociem lui H join space-ul ${}^1H$ obţinul astfel:

$$\forall (x,y) \in H^2, \quad x \circ_1 y = \{z \mid \widetilde{\mu}(x) \wedge \widetilde{\mu}(y) \leq \widetilde{\mu}(z) \leq \widetilde{\mu}(x) \vee \widetilde{\mu}(y)\}.$$

Folosind din nou construcţia din (ω), se obţine o funcţie de apartenenţă $\widetilde{\mu}_1$ şi corespunzător un join space ${}^2H$ ş.a.m.d. În acest mod se construieşte o secvenţă de mulţimi fuzzy şi de join space-uri $(\langle {}^iH, \circ_i\rangle, \widetilde{\mu}_i)_{i\geq 1}$ asociate lui H. Notăm $\widetilde{\mu}_0 = \widetilde{\mu}$, ${}^0H = H$. Atunci, pentru orice i, există un r, mai exact $r = r_i$, şi o partiţie $\pi = \{{}^iC_j\}_{j=1}^r$ a lui ${}^iH$ astfel încât, pentru orice $j \geq 1$ şi $x \in {}^iC_j, {}^iC_j = \widetilde{\mu}_{i-1}^{-1}(\widetilde{\mu}_{i-1}(x))$ (adică $x, y \in {}^iC_j \Longleftrightarrow \widetilde{\mu}_{i-1}(x) = \widetilde{\mu}_{i-1}(y)$).
Pentru $x \in H$, notăm $\lambda(x) = i_j$, dacă $x \in {}^iC_j$.
Pe mulţimea claselor $\{{}^iC_j\}_{j=1}^r$ definim următoarea relaţie de ordine:
$i_j < i_k$ dacă pentru $x \in {}^iC_j$ şi $y \in {}^iC_k$ are loc relaţia $\widetilde{\mu}_{i-1}(x) < \widetilde{\mu}_{i-1}(y)$ (adică $\lambda(x) < \lambda(y)$).

Stabilim câteva notaţii, pentru orice j, s :
$k_j = |\,{}^iC_j\,|$, ${}_sC = \bigcup\limits_{1\leq j\leq s} {}^iC_j$, ${}^sC = \bigcup\limits_{s\leq j\leq r} {}^iC_j$, ${}_sk = |{}_sC|$, ${}^sk = |{}^sC|$ şi
$I(i,j) = \{v \in I_{m+1}^* \mid i \wedge j \leq v \leq i \vee j\}$.
Fiecărui şir $({}^iC_{j_1}, {}^iC_{j_2}, ..., {}^iC_{j_r})$ putem asocia o r-uplă ordonată $(k_{j_1}, k_{j_2}, ..., k_{j_r})$, unde $k_{j_l} = |\,{}^iC_{j_l}\,|$, pentru orice l, $1 \leq l \leq r$.
În particular, oricărui hipergrupoid H asociem o r-uplă ordonată $(k_1, k_2, ..., k_r)$.

Teoremă 3.3.1. *Pentru orice $z \in C_s$, $s = 1, 2, ..., r$,*

$$\widetilde{\mu}_r(z) = \frac{2 \sum\limits_{\substack{i \leq s \leq j \\ i \neq j}}^{i,j} \left(\dfrac{k_i k_j}{\sum\limits_{i \leq t \leq j} k_t} \right) + \dfrac{k_s^2}{k_s}}{2_s k^s k - k_s^2}.$$

Observaţie 3.3.2. Se observă uşor că dacă unui hipergrupoid H_1 i se asociază r-upla $(k_1, k_2, ..., k_r)$ şi unui alt hipergrupoid H_2 i se asociază r-upla $(k_r, k_{r-1}, ..., k_2, k_1)$, atunci join space-urile ${}^1H_1$ şi ${}^1H_2$ determinate de H_1 şi, respectiv, de H_2 coincid.

Teoremă 3.3.3. *Fie $\langle H, \circ\rangle$ un hipergrup, $\widetilde{\mu} : H \longrightarrow [0,1]$ o submulţime fuzzy pe H şi ${}^1H$ join space-ul asociat. Fie $R_{\widetilde{\mu}}$ echivalenţa definită prin*

$$xR_{\widetilde{\mu}}y \Longleftrightarrow \widetilde{\mu}(x) = \widetilde{\mu}(y).$$

Atunci $R_{\widetilde{\mu}}$ este regulată şi este o congruenţă pe ${}^1H$.

3.3.2 Proprietăţi ale funcţiei de apartenenţă $\widetilde{\mu}_i$

Propoziţie 3.3.4. *Pentru orice $u \in H$ şi $i \geq 0$, $\widetilde{\mu}_i(u) = 1$ dacă şi numai dacă, pentru orice $(x, y) \in H^2$ astfel încât $u \in x \circ_i y$, $| x \circ_i y |= 1$.*

Propoziţie 3.3.5. *Pentru orice $u \in H$ şi $i \geq 1$, $\widetilde{\mu}_i(u) \neq 1$.*

Observaţie 3.3.6. Există hipergrupuri H pentru care există $x, y \in H$ astfel încât:

(i) $A(x) = A(y)$ şi $q(x) \neq q(y)$.

(ii) $A(x) \neq A(y)$ şi $q(x) = q(y)$.

În ambele cazuri $\widetilde{\mu}(x) \neq \widetilde{\mu}(y)$.

Observaţie 3.3.7. Presupunem că hipergrupoidul H are descompunerea
$H = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, unde, pentru orice $x \in H$, $C_i = \widetilde{\mu}^{-1}(\widetilde{\mu}(x))$.
Dacă $x \in C_i$ şi $y \in C_j$, $i \neq j$, cu $| C_i |=| C_j |$, atunci $q(x) = q(y)$ dacă şi numai dacă ${}_ik = k^j$ dacă şi numai dacă ${}^ik = k_j$.
Pentru $i = 1$ şi $j = r$, adică $x \in C_1$ şi $y \in C_r$, avem $q(x) = q(y)$.

3.3.3 Gradul fuzzy al unui hipergrup

Definiţie 3.3.8. Un hipergrupoid H are *gradul fuzzy* m, $m \in \mathbb{N}^*$, şi scriem $f.g.(H) = m$, dacă, pentru fiecare i, $0 \leq i < m$, join space-urile ${}^iH$ şi ${}^{i+1}H$ asociate lui H nu sunt izomorfe, iar pentru fiecare s, $s > m$, ${}^sH$ este izomorf cu ${}^mH$.
Spunem că hipergrupoidul H are *gradul fuzzy tare* m şi scriem $s.f.g.(H) = m$ dacă $f.g.(H) = m$ şi pentru $s > m$, ${}^sH = {}^mH$.

Teoremă 3.3.9. *Fie hipergrupoidul $H = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ înzestrat cu mulţimea fuzzy $\widetilde{\mu}$ astfel încât*

$$\widetilde{\mu}(a_0) < \widetilde{\mu}(a_1) < ... < \widetilde{\mu}(a_p) < ... < \widetilde{\mu}(a_n).$$

Atunci

(i) *dacă $n = 2p + 1, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ obţinem*

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{\mu}_1(a_p) & < \widetilde{\mu}_1(a_{p-1}) & < ... < & \widetilde{\mu}_1(a_1) & < \widetilde{\mu}_1(a_0) \\ \| & \| & & \| & \| \\ \widetilde{\mu}_1(a_{p+1}) & \widetilde{\mu}_1(a_{p+2}) & ... & \widetilde{\mu}_1(a_{n-1}) & \widetilde{\mu}_1(a_n) \end{array}$$

(ii) *dacă $n = 2p, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, obţinem*

$$\begin{array}{cccccc} \widetilde{\mu}_1(a_p) < & \widetilde{\mu}_1(a_{p-1}) < & \widetilde{\mu}_1(a_{p-2}) < & ... < & \widetilde{\mu}_1(a_1) < & \widetilde{\mu}_1(a_0) \\ & \| & \| & & \| & \| \\ & \widetilde{\mu}_1(a_{p+1}) & \widetilde{\mu}_1(a_{p+2}) & ... & \widetilde{\mu}_1(a_{n-1}) & \widetilde{\mu}_1(a_n) \end{array}$$

În general, pentru $n + 1 = 2^s$, se obţine că join space-ul ${}^{s+1}H$ asociat lui H este un hipergrup total şi deci $s.f.g.(H) = s + 1$.

Corolar 3.3.10. *Dat un număr natural $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ există un hipergrup H astfel încât $s.f.g.(H) = n$. Mai mult, H este un join space.*

Este interesant de văzut când două join space-uri consecutive din secvenţa construită nu sunt izomorfe, adică secvenţa nu se încheie. În acest sens avem următorul rezultat, care exprimă o condiţie suficientă dar nu şi necesară, după cum se observă din exemplul de mai jos.

Teoremă 3.3.11. *Pentru join space-ul ${}^iH$ asociat unui hipergrupoid H considerăm descompunerea ${}^iH = \bigcup_{l=1}^{r} C_l$, unde, pentru orice l, $1 \leq l \leq r$ şi orice $x \in C_l$, $C_l = \widetilde{\mu}_{i-1}^{-1}(\widetilde{\mu}_{i-1}(x))$ şi fie $(k_1, k_2, ..., k_r)$ r-upla asociată acestuia.*
Dacă $(k_1, k_2, ..., k_r) = (k_r, k_{r-1}, ..., k_1)$, atunci join space-urile ${}^{i+1}H$ şi ${}^iH$ nu sunt izomorfe.

Exemplu 3.3.12. Fie hipergrupoidul $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ înzestrat cu mulţimea fuzzy $\widetilde{\mu}$ care verifică relaţia

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{\mu}(0) & < & \widetilde{\mu}(2) & < & \widetilde{\mu}(3) & < & \widetilde{\mu}(5). \\ \| & & & & \| & & \\ \widetilde{\mu}(1) & & & & \widetilde{\mu}(4) & & \end{array}$$

4-upla corespunzătoare lui H este $(2, 1, 2, 1)$, care în mod evident nu verifică condiţiile teoremei anterioare. Pentru join space-ul ${}^1H$ se obţine

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{\mu}_1(2) & < & \widetilde{\mu}_1(0) & < & \widetilde{\mu}_1(3) & < & \widetilde{\mu}_1(5) \\ & & \| & & \| & & \\ & & \widetilde{\mu}_1(1) & & \widetilde{\mu}_1(4) & & \end{array}$$

şi deci i se asociază 4-upla $(1, 2, 2, 1)$; în concluzie join space-urile ${}^2H$ şi ${}^1H$ nu sunt izomorfe.

3.3.4 Gradul fuzzy al unui hipergrup complet

Orice hipergrup complet H poate fi reprezentat astfel $H = \bigcup_{g \in G} A_g$, unde

1) $(G, \circ)$ este un grup;

2) pentru orice $(g_1, g_2) \in G^2, g_1 \neq g_2$, avem $A_{g_1} \cap A_{g_2} = \emptyset$;

3) dacă $(a, b) \in A_{g_1} \times A_{g_2}$, atunci $a \circ b = A_{g_1 g_2}$.

Dacă G este un grup abelian, atunci H este un hipergrup complet comutativ, deci un join space.
Conform reprezentării de mai sus, orice hipergrup complet de ordin n este caracterizat de o m-uplă $[k_1, k_2, ..., k_m]$, unde $m = \mid G \mid$, $2 \leq m \leq n-1$, $G = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$, iar pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $k_i = \mid A_{g_i} \mid$.

Teoremă 3.3.13. *Fie H un hipergrup complet. Atunci, pentru orice $u \in H$, $\widetilde{\mu}(u) = \dfrac{1}{\mid A_{g_u} \mid}$, unde $u \in A_{g_u}$.*

Definiţie 3.3.14. Fie $n \geq 3$ un număr natural. O *m-descompunere a lui n*, $2 \leq m \leq n-1$, este un sistem ordonat de numere naturale $(k_1, k_2, ..., k_m)$, astfel încât $k_i \geq 1$, pentru orice $i, 1 \leq i \leq m$, $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$ şi $k_2 \leq k_3 \leq ... \leq k_m$.

Observaţie 3.3.15. Gradul fuzzy al unui hipergrup complet nu depinde de grupul G considerat, ci doar de m-descompunerile lui n.

Teoremă 3.3.16. *Fie H un hipergrup complet de ordin $n \leq 6$.*

(i) *Pentru $n = 3$, $sfg(H) = 1$.*

(ii) *Pentru $n = 4$, există 3 hipergrupuri cu $sfg(H) = 1$ şi două cu $sfg(H) = 2$.*

(iii) *Pentru $n = 5$, $sfg(H) = 1$.*

(iv) *Pentru* $n = 6$, *există* 17 *hipergrupuri cu* $sfg(H) = 1$ *şi* 4 *hipergrupuri cu* $sfg(H) = 2$.

În continuare determinăm gradul fuzzy al unor 1-hipergrupuri complete de o anumită structură.

Dacă H este un 1-hipergrup complet, atunci este de tipul $[1, k_2, k_3, ..., k_m]$.

Propoziţie 3.3.17. *Dacă* H *este un* 1*-hipergrup complet de tipul* $[\underbrace{1, 1, ..., 1}_{k\ \ ori}, k]$, *unde* $n =|H|= 2k$, *atunci* $s.f.g.(H)$=*2.*
Mai general, dacă structura hipergrupului complet H, *care nu este un* 1*-hipergrup, se reprezintă prin* $[\underbrace{p, p, ..., p}_{k\ \ ori}, kp]$, *unde* $n =|H|= 2kp$, *atunci* $s.f.g.(H)$=*2.*

Propoziţie 3.3.18. *Fie* H *un* 1*-hipergrup complet de tipul* $[\underbrace{1, 1, ..., 1}_{l\ \ ori}, \underbrace{k, k, ..., k}_{p\ \ ori}, l]$, *cu* $1 < k < l$, $p \geq 1$, $n = \mid H \mid = pk + 2l$.

(i) *Dacă* $kp = 2l$, *atunci* $s.f.g.(H) = 3$.

(ii) *Dacă* $kp \neq 2l$, *atunci* $f.g.(H) = 2$.

Generalizând rezultatul pentru hipergrupuri complete de tipul

$$[\underbrace{p, p, ..., p}_{s\ \ ori}, \underbrace{k, k, ..., k}_{t\ \ ori}, ps],$$

cu $2 \leq p < k < ps$, $n = |H| = 2ps + kt$ *(care evident nu sunt* 1*-hipergrupuri), obţinem că, pentru* $n = 4ps$, $s.f.g.(H) = 3$, *iar pentru* $kt \neq 2ps$, $f.g.(H) = 2$.

3.3.5 Un exemplu de un 1-hipergrup care nu este complet

Vom studia secvenţa de join space-uri asociată unui anumit tip de 1-hipergrup care nu este complet şi anume:
$H = H_n = \{e\} \cup A \cup B$, unde $\mid A \mid= \alpha$, $\mid B \mid= \beta$ cu $\alpha, \beta \geq 2$ şi $A \cap B = \emptyset$, $e \notin A \cup B$. Notăm $A = \{a_1, ..., a_\alpha\}$ şi $B = \{b_1, ..., b_\beta\}$. Hiperoperaţia este definită astfel:

$$\begin{aligned}
&\forall\, a \in A,\ a \circ a = b_1,\\
&\forall\, (a_1, a_2) \in A^2 \quad \text{astfel încât} \quad a_1 \neq a_2,\ a_1 \circ a_2 = B,\\
&\forall\, (a, b) \in A \times B,\ a \circ b = b \circ a = e,\\
&\forall\, (b, b') \in B^2,\ b \circ b' = A,\\
&\forall\, a \in A,\ a \circ e = e \circ a = A,\\
&\forall\, b \in B,\ b \circ e = e \circ b = B \text{ şi } e \circ e = e.
\end{aligned}$$

Dacă $n = 6$, obţinem $s.f.g.(H) = 3$.
Dacă $\alpha = \beta \geq 2$, atunci obţinem că $s.f.g.(H) = 1$.
Pentru $\alpha > \beta \geq 2$ din nou rezultă $s.f.g.(H) = 1$.
În cazul în care $\beta > \alpha \geq 2$, considerând $\beta > \alpha \geq 3$, se studiază două cazuri:

(i) $\widetilde{\mu}(e) > \widetilde{\mu}(b_1) > \widetilde{\mu}(a_i) > \widetilde{\mu}(b_j)$, pentru care se găseşte $s.f.g.(H) = 1$;

(ii) $\widetilde{\mu}(e) > \widetilde{\mu}(a_i) > \widetilde{\mu}(b_1) > \widetilde{\mu}(b_j)$, care conduce la o problemă deschisă: există valori ale lui α pentru care $s.f.g.(H) = 1$ şi alte valori pentru care $s.f.g.(H) = 2$.

3.3.6 Gradul fuzzy al unui i.p.s. hipergrup

Corsini a demonstrat în [6] că orice i.p.s. hipergrup de ordin strict mai mic decât 9 este tare canonic. Hipergrupurile canonice au fost utilizate de Roth în demonstrarea unor teoreme din teoria caracterelor grupurilor finite, în timp ce McMullen şi Price au folosit generalizări ale lor în analiza armonică şi în fizica particolelor.

Pentru $n \leq 8$, au fost determinate de Corsini în [6], [7], [8], [9] toate i.p.s. hipergrupurile neizomorfe de cardinal n, ale căror grad fuzzy a fost studiat de subsemnata şi Corsini în [19], [20]. Prezentăm mai jos rezultatele obţinute în această direcţie.

Teoremă 3.3.19

(i) *Există un unic i.p.s. hipergrup H de ordin 3, iar $s.f.g.(H) = 1$.*

(ii) *Există 3 i.p.s. hipergrupuri H_1, H_2, H_3 neizomorfe de ordin 4; în plus $s.f.g.(H_1) = s.f.g.(H_2) = 1$, $s.f.g.(H_3) = 2$.*

(iii) *Există 8 i.p.s. hipergrupuri neizomorfe de ordin 5: unul cu $s.f.g.(H) = 2$ şi celelalte cu $s.f.g.(H) = 1$.*

(iv) *Există 19 i.p.s. hipergrupuri neizomorfe de ordin 6: 14 dintre ele au $s.f.g.(H) = 1$, 4 au $s.f.g.(H) = 2$ şi unul are $s.f.g.(H) = 3$.*

(v) *Există 36 i.p.s. hipergrupuri neizomorfe de ordin 7: pentru 25 dintre ele $s.f.g.(H) = 1$, două au $f.g.(H) = 1$, 8 sunt cu $s.f.g.(H) = 2$, iar unul are $s.f.g.(H) = 3$.*

3.3.7 Secvenţa de join space-uri asociate unei mulţimi rough

Teoria mulţimilor rough, propusă de Zdzislaw Pawlak în 1982, a atras atenţia a numeroşi cercetători din diferite câmpuri ştiinţifice şi tehnologice. Încă de la început s-au găsit aplicaţii ale teoriei în logică, algebră şi topologie, toria deciziei, inteligenţă artificială, medicină, chimie, economie, inginerie, etc.

Fie R o relaţie de echivalenţă pe un univers H şi pentru fiecare element $x \in H$, notăm clasa sa de echivalenţă în raport cu R prin $R(x)$. Pentru orice submulţime nevidă A a lui H, o *submulţime rough* a lui H este determinată de perechea $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$, unde

$$\underline{R}(A) = \bigcup_{R(x) \subset A} R(x) \quad \text{şi} \quad \overline{R}(A) = \bigcup_{R(x) \cap A \neq \emptyset} R(x).$$

Biswas a demonstrat în 1999 (vezi [2]) că orice mulţime rough este un tip de mulţime fuzzy, dar reciproc nu.

Mai târziu Corsini a asociat unui univers H, dotat cu o mulţime rough, următoarea hiperoperaţie:

$$\forall (x, y) \in H^2, x \circ y = \overline{R}(\{x, y\}) \setminus \underline{R}(\{x, y\})$$

demonstrând că este definită peste tot dacă şi numai dacă $\mid R(x) \mid \geq 3$, pentru orice $x \in H$. Mai mult a obţinut următorul rezultat important.

Propoziţie 3.3.20 *Hipergrupoidul $\langle H, \circ \rangle$ este un join space dacă şi numai dacă pentru fiecare $x \in H$, $\mid R(x) \mid \geq 3$.*

Atunci hiperoperaţia devine $x \circ y = R(x) \cup R(y)$.

Asociem acestui join space submulţimea fuzzy $\widetilde{\mu}$ definită prin relaţiile (ω) din paragraful 3.3.1. Obţinem, pentru orice $x, y \in H$ şi orice $u \in x \circ y$,

$$\mu_{x,y}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mid R(x) \mid} & , \text{dacă } (x, y) \in R \\ \dfrac{1}{\mid R(x) \mid + \mid R(y) \mid} & , \text{dacă } (x, y) \notin R \end{cases}$$

Notăm mulţimea factor a lui H în raport cu relaţia R prin

$$H/R = \{R(x_1), R(x_2), ..., R(x_n)\} \quad \text{şi} \quad \mid R(x_i) \mid = \lambda_i.$$

Pentru orice $u \in H$, există $i \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $u \in R(x_i)$ şi atunci

$$\widetilde{\mu}(u) = \frac{1 + 2\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_i} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_i} + ... + \dfrac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1} + \lambda_i} + \dfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \lambda_i} + ... + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_i}\right)}{2n - \lambda_i}.$$

Am demonstrat că pentru două elemente distincte $u, v \in H$ se obţine:
$\widetilde{\mu}(u) = \widetilde{\mu}(v) \Longleftrightarrow |R(u)|=|R(v)|$. Mai mult, $\widetilde{\mu}(u) < \widetilde{\mu}(v) \Longleftrightarrow |R(u)|>|R(v)|$.
În plus, dacă R este o relaţie de echivalenţă pe H astfel încât pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, avem $\mid R(x_i) \mid = k = const$, atunci $\widetilde{\mu}(x) = \widetilde{\mu}(y)$, oricare ar fi $x, y \in H$ şi deci join space-ul ${}^1H$ asociat este un hipergrup total, iar $s.f.g.(H) = 1$.

3.3.8 Proprietăţi ale join space-urilor asociate unui hipergrupoid

Fie $(H, \widetilde{\mu})$ un hipergrupoid înzestrat cu o mulţime fuzzy şi fie $(\langle {}^iH, \circ_i\rangle; \widetilde{\mu}_i)_{i\geq 1}$ secvenţa de join space-uri şi mulţimi fuzzy asociate lui H.

Propoziţie 3.3.21. *Inima oricărui join space ${}^iH$ asociat hipergrupoidului H coincide cu întreg hipergrupoidul.*

Pe lângă relaţia fundamentală β definită pe un hipergrup, pot fi definite alte trei relaţii, chemate şi ele fundamentale şi introduse de Jantosciak în [29]. Cu ajutorul lor este introdusă noţiunea de hipergrup redus. În continuarea vom analiza în ce condiţii join space-urile ${}^iH$ pot fi hipergrupuri reduse.

Definiţie 3.3.22. Fie x, y elemente arbitrare ale unui hipergrupoid H.

(i) x şi y se numesc *operaţional echivalente* dacă $x \circ a = y \circ a$ şi $a \circ x = a \circ y$, pentru orice $a \in H$;

(ii) x şi y se numesc *inseparabile* dacă pentru $a, b \in H$, $x \in a \circ b$ dacă şi numai dacă $y \in a \circ b$;

(iii) x şi y se numesc *esenţial identice* dacă x şi y sunt operaţional echivalente şi inseparabile.

Observaţie 3.3.23. Cele trei relaţii, notate prin $\sim_o$, $\sim_i$ şi respectiv $\sim_e$, sunt relaţii de echivalenţă pe H. Pentru un element $x \in H$, notăm clasele lui de echivalenţă în raport cu relaţiile amintite prin $\widehat{x_o}$, $\widehat{x_i}$ şi $\widehat{x_e}$.

Definiţie 3.3.24. Un hipergrup H se numeşte *redus* dacă, pentru orice $x \in H$, $\widehat{x_e} = \{x\}$.

Propoziţie 3.3.25. *Pentru orice hipergrup $\langle H,\circ\rangle$, hipergrupoidul factor determinat de ralaţia de echivalenţă $\sim_e$, notat $\langle H/\sim_e, \star\rangle$, este un hipergrup redus, unde hiperoperaţia $\star$ pe mulţimea factor $H/\sim_e$ este definită prin*

$$\widehat{x_e} \star \widehat{y_e} = \{\widehat{z_e} \mid z \in x \circ y\}.$$

Teoremă 3.3.26. *Pentru orice hipergrupoid H şi orice $i \geq 1$, hipergrupul factor ${}^iH/R_{\widetilde{\mu}_i}$ este un hipergrup redus, unde, pentru orice $x, y \in H$, $xR_{\widetilde{\mu}_i}y \Longleftrightarrow \widetilde{\mu}_i(x) = \widetilde{\mu}_i(y)$.*

Teoremă 3.3.27. *Join space-ul ${}^1H$ asociat unui hipergrupoid $(H, \widetilde{\mu})$ este un hipergrup redus dacă şi numai dacă n-upla asociată lui H este $(1, 1, ..., 1)$.*
Mai mult, join space-ul ${}^1H$ este unicul join space din secvenţa $(\langle {}^rH, \circ_r\rangle, \widetilde{\mu}_r)_{r\geq 1}$ corespunzătoare lui H care poate fi un hipergrup redus.

3.4 Alte exemple de hipergrupuri reduse

În această secţiune prezentăm câteva proprietăţi ale relaţiilor fundamentale definite de Jantosciak în [29] şi dăm câteva exemple de hipergrupuri reduse.

Propoziţia 3.4.1.

(i) *Relaţia de operaţional echivalenţă este regulată, dar în general nu este tare regulată.*

(ii) *Relaţia de inseparabilitate nu este o relaţie regulată.*

(iii) *Relaţia de esenţial indistinctibilitate este regulată, dar în general nu este tare regulată.*

Propoziţia 3.4.2. *Dacă H este un hipergrup cu o identitate scalară, atunci, pentru $a, b \in H$, avem:*

$$x \sim_o y \Longleftrightarrow x \sim_i y \Longleftrightarrow x \sim_e y \Longleftrightarrow x = y.$$

(În acest caz toate cele trei relaţii sunt regulate.)

Propoziţia 3.4.3. *Fie $(H, \circ)$ un hipergrupoid. Relaţia $\sim_i$ este regulată pe H dacă şi numai dacă $a \sim_i b \Longrightarrow a \sim_o b$, pentru $a, b \in H$.*

Propoziţia 3.4.4. *Fie $(H, \circ)$ un hipergrup. Dacă, pentru orice $x \in H$, există $(a, b) \in H^2$ astfel încât $a \circ b = x$, atunci H este un hipergrup redus.*

Corolar 3.4.5. *Dacă H este un hipergrup cu identităţi scalare, atunci H este un hipergrup redus.*

Exemplu. Orice i.p.s. hipergrup este un hipergrup redus.

Propoziţia 3.4.6. *Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ şi R o echivalenţă pe G astfel încât, pentru orice $x \in G$, $\hat{x} = \{x, x^{-1}\}$. Definim pe G/R hiperoperaţia*

$$\hat{x} \otimes \hat{y} = \{\widehat{xy}, \widehat{xy^{-1}}\}.$$

Atunci G/R este un hipergrup redus.

Teorema 3.4.7. *Orice join space $(H, \circ)$ obţinut asociind unui univers H, înzestrat cu un rough set $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$, hiperoperaţia*

$$\forall (x, y) \in H^2, x \circ y = \overline{R}(\{x, y\}) \setminus \underline{R}(\{x, y\})$$

nu este un hipergrup redus.

Capitolul 4

Concluzii şi lucrări viitoare

Alături de contribuţiile anterioare aduse în teoria hipergrupurilor şi mai ales în stabilirea de noi legături între hipergrupuri şi mulţimi fuzzy, lucrarea de faţă confirmă, prin rezultatele noi obţinute în al treilea capitol, faptul că aceste asocieri ce conduc la obţinerea de noi structuri algebrice deschid o poartă înspre vastul univers al hiperstructurilor. Multe probleme din acest domeniu rămân deschise, mai jos fiind formulate câteva dintre ele, care pot fi o continuare a tezei noastre.

Partea centrală a acestei teze o constituie Capitolul 3, în care se studiază secvenţa de join-space-uri şi mulţimi fuzzy asociate unui hipergrupoid H.

Reamintim că, fiecărui hipergrupoid H dotat cu o mulţime fuzzy i se poate asocia o r-uplă ordonată $(k_1, k_2, ..., k_r)$, unde $\sum_{i=1}^{r} k_i = n = \mid H \mid$, ca în subcapitolul § 3.3.1.

Cazul în care r-upla este de forma $(k, k, ..., k)$, $k \geq 1$, este tratat şi rezolvat de Teorema 3.3.9; dacă r-upla este egală cu opusa sa, anume $(k_1, k_2, ..., k_r) = (k_r, k_{r-1}, ..., k_1)$, atunci putem aplica Teorema 3.3.11 pentru a determina lungimea secvenţei de join space-uri asociate lui H.

Problema 1. Să se studieze join space-ul ${}^1H$ asociat hipergrupoidului H în situaţia r-uplei $(1, 2, ..., r)$.

Problema 2. Să se cerceteze dacă pentru orice $k \geq 1$ există un hipergrup H astfel încât mulţimea fuzzy $\widetilde{\mu}$ definită prin relaţiile (ω) din subcapitolul § 3.3.1 determină exact r-upla $(k, k, ..., k)$.
Până acum este rezolvat cazul $k = 2$, considerând pe H hiperprodusul:

$$a_i \circ a_i = a_i, a_i \circ a_j = \{a_i, a_{i+1}, ..., a_j\}, \quad \text{pentru} \quad i < j$$

(vezi Corolar 3.3.10).

Unul din rezultatele fundamentale obţinute în această lucrare îl constituie Teorema 3.3.11, în care este stabilită o condiţie suficientă, dar nu şi necesară, pentru ca două join space-uri consecutive din secvenţa asociată unui hipergrupoid H să nu fie izomorfe.

Problema 3. Să se determine o condiţie necesară pentru ca aceste join-space-uri să nu fie izomorfe, deci pentru ca secvenţa să nu se încheie.

Fiecărui hipergrupoid îi corespunde un grad fuzzy, adică lungimea secvenţei de join space-uri asociate lui. Dat un număr natural $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, se poate construi un hipergrup H (care este un join space) astfel încât $s.f.g.(H) = n$ (vezi Corolar 3.3.10).

Problema 4. Să se determine o metodă de construcţie a unui hipergrup H de cardinal minim, pentru care $s.f.g.(H) = n$.

Asociind unui univers H o submulţime rough $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$, se poate construi un join space $\langle H, \circ \rangle$, unde pentru orice $x, y \in H$, $x \circ y = \overline{R}(\{x, y\}) \setminus \underline{R}(\{x, y\})$, dacă şi numai dacă pentru orice $x \in H$, $\mid R(x) \mid \geq 3$. Asociind de această dată mulţimea fuzzy $\widetilde{\mu}$ prin relaţiile (ω) din paragraful 3.3.1, am demonstrat că dacă R este o relaţie de echivalenţă astfel încât $\mid R(x) \mid = k = const$, pentru orice $x \in H$, atunci $s.f.g.(H) = 1$.

Problema 5. Să se studieze gradul fuzzy al join space-ului $\langle H, \circ \rangle$ asociat unei mulţimi rough $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$, pentru care R este o relaţie de echivalenţă diferită de cea anterioară.

Până acum, am considerat doar câteva clase remarcabile de hipergrupuri: i.p.s. hipergrupuri, cele complete sau cele dotate cu un rough set.

Problema 6. Să se studieze secvenţa asociată altor tipuri speciale de hipergrupuri, ca de exemplu : cele ciclice, cele obţinute dintr-o relaţie binară sau dintr-un hipergraf.

Bibliografie

[1] Ameri, R., Zahedi, M.M., *Hypergroup and join space induced by a fuzzy subset*, PU.M.A., **8**(1997), 155–168.

[2] Biswas, R., *Rough Sets are Fuzzy Sets*, BUSEFAL, **83**(2000), 24–30.

[3] Buckley, J.J., *The Fuzzy Mathematics of Finance*, Fuzzy sets and systems, **21**(1987), 257–273.

[4] Corsini, P., *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore, 1993.

[5] Corsini, P., Leoreanu, V., *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluwer Academic Publishers, Advances in Mathematics, 2003.

[6] Corsini, P., *Sugli ipergruppi canonici finiti con identita parziali scalari*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, Serie II, Tomo XXXVI (1987), 205–219.

[7] Corsini, P., *(i.p.s.) Ipergruppi di ordine* 6, Ann. Sc. de l'Univ. Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II, **24** (1987), 81–104.

[8] Corsini, P., *(i.p.s.) Ipergruppi di ordine* 7, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, Tomo XXXIV, (1985-1986), 199–216.

[9] Corsini, P., *(i.p.s.) Hypergroups of order* 8, Aviani Editore, 1993.

[10] Corsini, P., *Join Spaces, Power Sets, Fuzzy Sets*, Proc. Fifth International Congress on A.H.A., 1993, Iaşi, Romania, Hadronic Press (1994), 45–52.

[11] Corsini, P., *Properties of hyperoperations associated with fuzzy sets and with factor spaces*, International Journal of Science şi Technology, Kashan University, **1**(2000), 13–22.

[12] Corsini, P., *Fuzzy sets, join spaces and factor spaces*, PU.M.A. **11**(2000), no.3, 439–446.

[13] Corsini, P., *Feebly canonical and 1-hypergroups*, Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica, **24**(1983), no.2 49–56.

[14] Corsini, P., Leoreanu, V., *Join Spaces associated with Fuzzy Sets*, Journal of Combinatorics, Information and System Sciences, **20**(1995), no.1, 293–303.

[15] Corsini, P., Leoreanu, V., *Fuzzy Sets, Join Spaces associated with Rough Sets* , Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo LI, (2002), 527–536.

[16] Corsini, P., Moghani, G.A., *On the finite semi-join spaces and fuzzy sets,* PU.M.A., **12**(2001), no.4, 337–353.

[17] Corsini, P., Tofan, I., *On fuzzy hypergroups,* PU.M.A., **8**(1997), no.1, 29–37.

[18] Corsini, P., *A new connection between Hypergroups and Fuzzy Sets,* Southeast Asian Bulletin of Mathematics, **27** (2003), 221–229.

[19] Corsini, P., Cristea, I., *Fuzzy grade of i.p.s. hypergroups of order* 7, Iranian Journal of Fuzzy Systems, **1**(2004), no.2, 15–32.

[20] Corsini, P., Cristea, I., *Fuzzy grade of i.p.s. hypergroups of order less or equal to* 6, PU.M.A., **14**(2003), no.4, 275–288.

[21] Corsini, P., Cristea, I., *Fuzzy Sets and Non Complete* 1*-hypergroups* , An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **13**(2005), fasc.(1), 27–54.

[22] Cristea, I., *Complete Hypergroups,* 1*-Hypergroups and Fuzzy Sets*, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **10**(2002), fasc.(2), 25–38.

[23] Cristea, I., *A property of the connection between fuzzy sets and hypergroupoids*, accepted by Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, (2005).

[24] Cristea, I., *Fuzzy grade of the complete hypergroups*, accepted by Set-valued Mathematics and Applications, (2006).

[25] Dresher, M., Ore, O., *Theory of multigroups*, Amer. J. Math., **60**(1938), 705–733.

[26] Dubois, D., Prade, H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[27] Dubois, D., Prade, H., *Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets*, Int. J. General Systems, **17**(1990), 191–209.

[28] Jantosciak, J., *Classical geometries and hypergroups*, Convegno su: Ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni (P.Corsini, ed.), Udine, 1985, 93–104.

[29] Jantosciak, J., *Homomorphism, Equivalences and Reductions in Hypergroups*, Rivista Mat.Pura Appl., **9**(1991), 23–47.

[30] Jantosciak, J., *Reduced Hypergroups* Algebraic Hyperstructures and Applications (T.Vougiouklis, ed.), Proc. 4th Int. Cong. Xanthi, Greece, 1990, World Scientific, Singapore, 1991, 119–122.

[31] Leoreanu, V., *Direct limit and inverse limit of join spaces associated with fuzzy sets*, PU.M.A., **11**(2000), 509–516.

[32] Leoreanu, V., *Direct limits and products of Join Spaces associated with Rough Sets*, Honorary Volume dedicated to Prof. Emeritus J.Mittas, Aristotle University of Thessaloniki, 1999-2000, 307–311.

[33] Leoreanu, V., *Direct limits and products of Join Spaces associated with Rough Sets, part II*, International Journal of Science and Technology of Kashan University, **1**(2000), 33–40.

[34] Leoreanu, V., *New results in subhypergroup theory and on the nucleus structure*, Pure Math. and Appl., Budapest, **5**(1994), no.3, 317–329.

[35] Leoreanu, V., *On the heart of join spaces and of regular hypergroups*, Riv. Mat. Pura e Appl., **17**(1995), 133–142 .

[36] Marty, F., *Sur une generalization de la notion de group*, Eight Congress Math. Scandienaves, Stockholm, 1934, 45–49.

[37] Marty, F., *Sur les groupes et hypergroupes attaches a une fraction rationnelle*, Ann. de l'Ecole Normale, **53**(1936), 83–123.

[38] McMullen, J.R., Price, J.F., *Reversible hypergroups*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **47**(1977), 67–85.

[39] Migliorato, R., *Semi- ipergruppi e ipergruppi n-completi*, Ann.Sci. Univ. Clermont, **23**(1986), 99–123.

[40] Mittas, J., *Hypergroupes canoniques*, Math. Balkanica, **2**(1972), 165–179.

[41] Mittas, J., *Hypergroupes canoniques, values et hypervalues. Hypergroupes fortement et superieurement canoniques*, Bull.Greek Math. Soc., **23**(1982), 55–88.

[42] Pawlak, Z., *Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning about Data*, Kluwer Academic Publisher, 1991.

[43] Prenowitz, W., Jantosciak, J., *Geometries and Join Spaces*, J.Reine und Angew Math., **257**(1972), 100–128.

[44] Prenowitz, W., *Projective geometries as multigroups*, Amer.J. Math., **65**(1943), 235–256.

[45] Prenowitz, W., *Descriptive geometries as multigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **59**(1946), 333–380.

[46] Prenowitz, W., *Spherical geometries as multigroups*, Canad.J.Math., **2**(1950), 100-119.

[47] Rosenberg, I.G., *Hypergroups and join spaces determined by relations*, Ital. J. Pure Appl. Math., **4**(1998), 93–101.

[48] Rosenfeld, A., *Fuzzy groups*, J. Math. Anal. Appl., **35**(1971). 512–517.

[49] Roth, R., *Character and conjugacy class hypergroups of a finite group*, Ann. di Mat. Pura e Appl., **105**(1975), 295–311.

[50] Roth, R., *On derived canonical hypergroups*, Riv. Mat. Pura e Appl., **3**(1988), 81–85.

[51] Ştefănescu, M., *On constructions of hypergroups*, Contributions to general algebra, Proceedings of the conference, Linz, Austria, June 1994, Wien: Hölder–Pichler–Tempsky, 1995, 297–308.

[52] Ştefănescu, M., *Looking at hypergroups*, Algebraic Hyperstructures and Applications (Iaşi, 1993), Hadronic Press, Palm Harbor, 1994, 147–152.

[53] Ştefănescu, M., *Construction of hypergroups*, New frontiers in hyperstructures (Molise, 1997), Ser. New Front. Adv. Math. Ist. Ric. Base, Hadronic Press, Palm Harbor, 1998, 64–87.

[54] Ştefănescu, M., Cristea, I., *On the fuzzy grade of the hypergroups*, submitted (2006).

[55] Tofan, I., Volf, A.C., *On some connections between hyperstructures and fuzzy sets*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, **7**(2000), 63–68.

[56] Vougiouklis, T., *Hyperstructures and Their Representations*, Hadronic Press, Inc., Palm Harber, USA, 1994.

[57] Wall, W.S., *Hypergroups,* Amer. J. Math., **59** (1937), 77-98.

[58] Zadeh, L.A., *Fuzzy Sets,* Information and Control, **8**(1965), 338–353.