FACULTATEA DE MATEMATICA SI INFORMATICA
EXAMEN DE ADMITERE, SESIUNEA SEPTEMBRIE 1998
DOMENIU DE LICENTA: COLEGIU TEHNOLOGIE INFORMATICA

PROBA: ALGEBRA

I. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 2$. Se noteaza cu x_1, x_2 radacinile ecuatiei $f(x) = 0$.

1. Sa se determine ecuatia de gradul al doilea in y care are radacinile $y_1 = \frac{1}{x_1}$ si $y_2 = \frac{1}{x_2}$.

2. Sa se afle $m \in \mathbb{R}$, astfel incat $x_1^3 + x_2^3 = m(x_1^2 + x_2^2)$.

3. Sa se arate ca $f(x) \geq \frac{7}{4}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

II. 1. Sa se calculeze C_7^n stiind ca se verifica ecuatia: $C_{10}^{n+1} = C_{10}^{n-1}$.

2. Fie $x, y \in (0, \infty)$ satisfacand relatia: $2 \lg x - \lg y = \lg \frac{x+3y}{4}$. Sa se determine raportul $\frac{x}{y}$.

3. Sa se rezolve inecuatia $\log_2(2x^2 + x + 1) > 2$.

III. a) Sa se rezolve ecuatia: $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 14$ in multimea numerelor reale.

b) Sa se rezolve sistemul $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ $, x, y \in \mathbb{R}$.

c) Sa se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel incat $\sqrt{x^2 - x + 9} + 2x - 2x^2 = 3$

IV. Pe $\mathbb{R}$ se defineste legea de compozitie $*$ astfel:

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Rezolvati ecuatia $x * 2 = x + 2, x \in \mathbb{R}$.

2. Aratati ca $(\mathbb{R}, *)$ este grup.

3. Aratati ca functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{R}, *)$

V. Fie $a \in \mathbb{R}$ si matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Calculati $\det(A - aI_3)$.

2. Determinati $a \in \mathbb{R}$ astfel incat matricea $A - aI_3$ sa aiba rang minim.

3. Determinati matricea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$ cu proprietatea $AX = 2X$.