

FACULTATEA DE MATEMATICA SI INFORMATICA
EXAMEN DE ADMITERE, SESIUNEA SEPTEMBRIE 1999
DOMENIU DE LICENTA: MATEMATICA–INFORMATICA, MATEMATICA,
MATEMATICA–FIZICA

PROBA: ALGEBRA SI ANALIZA MATEMATICA

I. 1. Sa se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + \sqrt{xy} + y = 7 \end{cases} .$$

2. Sa se rezolve inecuatia: $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1.$

3. Fie $(a_n)_n \geq 1$ o progresie geometrica avand termeni strict pozitivi. Sa se arate ca:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt{a_2 a_{n-1}}, \forall n \geq 2.$$

II. Se considera sistemul:

$$\begin{cases} 2mx + y + z = 0 \\ x + my - z = -1 \\ x + 2my + z = 1 \end{cases} ,$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

1. Sa se rezolve sistemul in cazul $m = 1$.

2. Sa se determine parametrul m astfel incat sistemul sa fie compatibil determinat.

3. Sa se determine parametrul m astfel incat sistemul sa fie incompatibil.

III. Pentru orice $a > 0$, se defineste functia

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = \begin{cases} ax, & \text{daca } x > 0 \\ 0, & \text{daca } x \leq 0 \end{cases} .$$

Sa se arate ca:

1. $f_a \circ f_b = f_{ab}$, pentru orice $a, b \in (0, \infty)$.

2. Multimea $G = \{f_a/a > 0\}$ este grup abelian relativ la compunerea functiilor.

3. Grupul (G, \circ) este izomorf cu (\mathbb{R}_+^*, \cdot)

IV. Fie functia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{daca } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{daca } x = 0 \end{cases} .$

1. Sa se arate ca $f(x) > 0$, pentru orice $x > 0$.

2. Sa se arate ca f este continua in $x = 0$.
 3. Sa se studieze derivabilitatea functiei f in $x = 0$.
- V. Sa se calculeze:
1. $\int_0^\pi \sin^3 x dx$.
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + kn + k^2}$.
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_1^n \frac{x-2}{x+2} dx$.