A şasea ediţie a Concursului de Matematică

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie

$$\mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right)=\left\{x+yi\sqrt{3}|x,y\in\mathbb{Q}\right\}$$

şi

$$L=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -3y & x \end{pmatrix}|x,y\in\mathbb{Q}\right\}.$$

a) Arătaţi că $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right)$ este corp cu adunarea şi înmulţirea numerelor complexe;
b) Arătaţi că L este corp cu adunarea şi înmulţirea matricelor;
c) Demonstraţi că L şi $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right)$ sunt corpuri izomorfe.
d) Calculaţi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{2011}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{2011}.$$

Problema 2. a) Să se arate că:

$$\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2},\quad \forall x\in[0,1]\,;$$

b) Să se calculeze:

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{x^2-x+1}dx.$$

Problema 3. Fie $0\le a<b\le\frac{\pi}{2}$. Calculaţi:
a) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^n x dx$;
b) $\lim_{n\to\infty}\int_a^b\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$.

Problema 4. Fie inelul $(A,+,\cdot)$ în care $1\neq 0$ şi cu proprietatea că există un unic $\alpha\in A$ astfel încât $\alpha^2-\alpha+1=0$. Să se arate că:
a) $1+1+1=0$;
b) $x^{2p}=0\Leftrightarrow x^p=0$, unde $p\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in A$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.