A şasea ediţie a Concursului de Matematică

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat prin condiţiile

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0;$$

b) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} na_n;$$

c) Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}.$$

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ cu $\mathrm{A}^2 - B^2 = I_{2n+1}$. Arătaţi că:

$$\det(AB - BA) = 0.$$

(Presupunem cunoscut faptul că $\det(XY - I_k) = \det(YX - I_k), \forall X, Y \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$.)

Problema 3. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Să se arate că nu există funcţii continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu:

$$\begin{cases} f(a) = a + 1, \\ f(f(x)) = (x - a)^2 + a, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Problema 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ astfel încât

$$\det A = \det B = 1.$$

Să se demonstreze că

$$\det\left(A + \sqrt{2}B\right) \neq 0.$$

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.