A patra ediţie a Concursului de Matematică

Clasa a XII-a

Problema 1. a) Fie G un grup finit de ordin impar şi $a, b, c \in G$ cu proprietatea că $ab = c$ şi $cb = a$. Demonstraţi că $a = c$.

b) Găsiţi 3 elemente a, b, c din $(\mathbb{Z}_4, +)$ pentru care $ab = c, cb = a$ şi $a \neq c$.

Problema 2. Vom spune că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă este continuă şi

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{x\sqrt{2}} f(t)dt, \ \forall x \neq 0.$$

a) Determinaţi funcţiile polinomiale care au proprietatea (P).
b) Dacă f are proprietatea (P), demonstraţi că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}^*$, f'' este continuă pe $\mathbb{R}^*$ şi $f(0) = 0$.
c) Determinaţi toate funcţiile f care au proprietatea (P) şi există şi sunt finite limitele:

$$\lim_{x \to \infty} f''(x), \lim_{x \to -\infty} f''(x).$$

Problema 3. Pentru un inel A notăm $Z(A) = \{x \in A \mid xy = yx, \ \forall y \in A\}$ şi $I(A) = \{x \in A | x^2 = x\}$.

a) Notăm $G = Z(A) \cap I(A)$. Pe G definim legea $x * y = x + y - 2xy, \forall x, y \in G$. Demonstraţi că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Arătaţi că dacă $Z(A) \cap I(A)$ este o mulţime finită, atunci numărul elementelor acestei mulţimi este de forma $2^k, k \in \mathbb{N}$.

Problema 4. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, continuă, cu proprietatea că există

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \ \text{ şi există şi este finită } \lim_{x \to 0, x > 0} x f(x).$$

Definim sirul

$$a_n = \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x)dx, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstraţi că $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent la 0.

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se punctează de la 0 **la** 7.