A patra ediţie a Concursului de Matematică

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie sirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale nenule, cu proprietatea că

$$|x_{k+1}\cdot x_s - x_{s+1}\cdot x_k| \leq \frac{|x_k\cdot x_s|}{|k-s|}, \forall\ k,s\in\mathbb{N}^*, k\neq s.$$

Să se arate că $(x_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

Problema 2. Fie A o matrice de ordin n cu elemente reale, având proprietatea că $A^{2007}+A^{2008}+A^{2009}=O_n$. Notăm $B=A^2+A+I_n$. Să se demonstreze că matricea $I_n - AB$ este inversabilă.

Problema 3. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ strict monotonă şi $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ continuă, astfel încât

$$[g(x)f(x)-g(y)f(y)][g(y)f(x)-g(x)f(y)]\leq 0,$$

pentru orice $x,y\in(0,\infty)$. Să se arate că f este continuă pe $(0,\infty)$.

Problema 4. Fie $A\in M_2(\mathbb{C})$ şi $m,n\in\mathbb{N}^*$ numere prime între ele, de parităţi diferite, astfel încât det(A^m+I_2)=det(A^m-I_2) şi det(A^n+I_2)=det(A^n-I_2). Să se arate că $A^2=O_2$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se punctează de la 0 **la** 7.