A patra ediţie a Concursului de Matematică

ANUL II, Domeniul Matematică

Problema 1. (a). Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continuă. Să se arate că:

$$\lim_{y \to c, y > c} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y \to c, y > c} f(x,y)dx$$

(b). Fie $f : [0,1] \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = e^{-\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{x}{y^2}.$$

Calculaţi

$$\lim_{y \to 0, y > 0} \int_0^1 f(x,y)dx \text{ şi } \int_0^1 \lim_{y \to 0, y > 0} f(x,y)dx.$$

Problema 2. Fie p un numar prim si $F = Q(\omega, \xi)$ unde $\omega = \sqrt[p]{2}$ şi $\xi = cos\frac{2\pi}{p} + isin\frac{2\pi}{p}$, rădăcină primitivă de grad p a lui 1. Consideram sirurile de extinderi

$$Q \subset Q(\omega) \subset F \text{ şi } Q \subset Q(\xi) \subset F.$$

Să se determine gradul extinderii $Q \subset F$ si gradele extinderilor intermediare.

Problema 3. Fie curba $c : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$c(t) = (cost, sint, \frac{t}{2\pi}), \forall t \in (0, 2\pi).$$

a) Calculaţi $K_1(t)$ şi $K_2(t)$;
b) Deduceţi că c este o elice.

Problema 4. Calculati $I = \int\int_D \frac{y^2}{x^2}\, dxdy$, unde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\}.$$

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se punctează de la 0 **la** 7.

28 FEBRUARIE 2009