



A patra ediție a Concursului de Matematică  
ANUL I, Domeniul Matematică

**Problema 1.** Testați convergența seriilor

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ;

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, a > 0.$

**Problema 2.** (a). Să se demonstreze că într-un triunghi are loc relația  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ , unde notațiile sunt cele uzuale.

(b). Fie  $C_1(O_1, R_1)$  și  $C_2(O_2, R_2)$  două cercuri. Să se arate că dacă  $O_1O_2^2 = R_1^2 - 2R_1R_2$  atunci există un triunghi circumscris unui cerc și înscris în celălalt.

**Problema 3.** Fie  $V$  un spațiu vectorial peste  $\mathbb{R}$ . Să se arate că vectorii  $e_1, e_2, e_3$  sunt liniari independenți dacă și numai dacă vectorii  $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2, f_3 = e_1 + e_2 + e_3$  sunt liniari independenți.

**Problema 4.** Să se construiască o funcție bijectivă  $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$ . Există  $g : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$  bijectivă și continuă? Argumentați răspunsul.

**Notă: Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**