EXAMEN DE GRADUL II
PROBA SCRISĂ DE MATEMATICĂ

I. Subiect de specialitate (45 puncte)

1. Fie $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul al doilea având elementele în $\mathbb{Z}_2$.
a) Determinaţi numărul elementelor acestei mulţimi.
b) Arătaţi că ecuaţia $X^2 = \mathcal{O}_2$ are patru soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.
c) Aflaţi matricele din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ care sunt inversabile.
d) Găsiţi două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ astfel încât $AB \neq BA$.
e) Arătaţi că există cel puţin o matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ astfel încât $C \neq I_2$ şi $C^3 = I_2$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax+1}{x^2+1}.$$

a) Arătaţi că f are două puncte de extrem şi anume, un punct de minim şi unul de maxim.
b) Fie m minimul lui f şi M maximul lui f. Calculaţi $S = m + M$.

3. O piramidă triunghiulară regulată $SABC$ are latura bazei de lungime a şi feţele laterale triunghiuri dreptunghice în S.
a) Să se calculeze volumul piramidei.
b) Fie D şi E mijloacele muchiilor SA şi BC. Să se calculeze $\|DE\|$ şi măsura unghiului $\widehat{DEC}$.

II. Subiect de didactica specialităţii (45 puncte)

1. Întocmiţi o fişă de lucru pentru lecţia cu tema: "Operaţii cu numere complexe".

2. Alegeţi o matrice inversabilă şi calculaţi inversa sa prin 3 metode.

3. Demonstraţi că într-un triunghi medianele sunt concurente. Daţi două soluţii, una sintetică şi una analitică.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă din oficiu 10 puncte. Nota finală se calculează astfel: suma punctajelor obţinute la cele două subiecte I şi II se adună cu cele 10 puncte din oficiu şi rezultatul se împarte la 10.

Timp de lucru: 3 ore.

Preşedinte de comisie: Lect.univ.dr. Florin Gabriel Iorgulescu

EXAMEN DE GRADUL II
PROBA SCRISĂ DE MATEMATICĂ

I. Subiect de specialitate (45 puncte)

1. Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Arătaţi că $A^4 = B^3$.
b) Demonstraţi că $(AB)^n \neq I_2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
c) Determinaţi matricea X, având elementele în $\mathbb{R}$, cu proprietatea $AX + XB = I_2$.

2. Se consideră $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\, ln\frac{1}{x} + (1-x)\, ln\frac{1}{1-x} & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \in \{0,1\} \end{cases}.$$

a) Arătaţi că f este continuă pe $[0,1]$.
b) Studiaţi monotonia funcţiei f.
c) Demonstaţi că oricare ar fi $a, b \in (0,1)$ şi $a + b = 1$ are loc inegalitatea

$$a\, ln\frac{1}{a} + b\, ln\frac{1}{b} \leq ln2.$$

3. Fie O punctul de intersecţie al mediatoarelor unui triunghi ABC şi M un punct nesituat în planul (ABC). Să se arate că $OM \perp (ABC)$ dacă şi numai dacă $|AM| \equiv |BM| \equiv |CM|$.

II. Subiect de didactica specialităţii (45 puncte)

1. Întocmiţi o fişă de lucru pentru lecţia cu tema: "Operaţii cu matrice".

2. Alegeţi o ecuaţie iraţională (cu radicali) şi rezolvaţi-o prin 3 metode.

3. Demonstraţi că într-un triunghi înălţimile sunt concurente. Daţi două soluţii, una sintetică şi una analitică.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă din oficiu 10 puncte. Nota finală se calculează astfel: suma punctajelor obţinute la cele două subiecte I şi II se adună cu cele 10 puncte din oficiu şi rezultatul se împarte la 10.

Timp de lucru: 3 ore.

Preşedinte de comisie: Lect.univ.dr. Florin Gabriel Iorgulescu

EXAMEN DE GRADUL II
PROBA SCRISĂ DE MATEMATICĂ

I. Subiect de specialitate (45 puncte)

1. Fie ecuaţia $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$.
a) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, ecuaţia are o rădăcină ce aparţine intervalului $[-1, 1]$.
b) Să se determine m ştiind că ecuaţia are o rădăcină dublă.
c) Să se determine m astfel încât

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} < 6,$$

unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei.

2. Fie $a \in (0, 1)$ şi funcţiile $f, F : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^a}, F(x) = \int_1^x f(t)dt.$$

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.
b) Arătaţi că

$$\int_1^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(t)dt = F(n), n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

c) Fie $x_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$. Deduceţi că $F(n+1) < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
d) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Se dă un cub de latură a. Să se afle distanţa dintre o diagonală a cubului şi o muchie laterală pe care nu o intersectează.

II. Subiect de didactica specialităţii (45 puncte)

1. Întocmiţi o fişă de lucru pentru lecţia cu tema: ”Reguli de calcul cu logaritmi”.

2. Alegeţi o funcţie continuă şi calculaţi primitivele sale prin 3 metode.

3. Demonstraţi că într-un triunghi mediatoarele sunt concurente. Daţi două soluţii, una sintetică şi una analitică.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă din oficiu 10 puncte. Nota finală se calculează astfel: suma punctajelor obţinute la cele două subiecte I şi II se adună cu cele 10 puncte din oficiu şi rezultatul se împarte la 10.

Timp de lucru: 3 ore.

Preşedinte de comisie: Lect.univ.dr. Florin Gabriel Iorgulescu