UNIVERSITATEA OVIDIUS CONSTANŢA
DEPARTAMENTUL DE PERFECŢIONARE A PERSONALULUI DIDACTIC
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ (PROFESORI I)
VARIANTA IV 28 August 2009

Probă de concurs pentru obţinerea gradului didactic II în învăţământ

I. Se consideră polinomul $f = X^4 - 4X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Să se determine numărul rădăcinilor raţionale ale polinomului f.

(b) Să se arate că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

(c) Fie $x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui f. Calculaţi

$$(x_1^{2009} + x_2^{2009} + x_3^{2009} + x_4^{2009}) \left(\frac{1}{x_1^{2010}} + \frac{1}{x_2^{2010}} + \frac{1}{x_3^{2010}} + \frac{1}{x_4^{2010}} \right).$$

II. Se consideră funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3},\ g(x) = f(x) - \frac{x^5}{5},\ h(x) = \arctan x.$$

(a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^5}$.

(b) Demonstraţi că $f(x) > 0 > g(x)$, pentru orice $x > 0$.

(c) Demonstraţi că aria suprafeţei mărginite de axa Ox, graficul funcţiei h şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$ este un număr cuprins în intervalul $(0,41;\ 0,45)$.

III.

(a) Fie triunghiul ABC şi punctul $M \in (AB)$. Demonstraţi că

$$\text{Aria}(AMC) = \text{Aria}(BMC) \text{ dacă şi numai dacă } (AM) \equiv (MB).$$

(b) Fie tetraedrul ABCD şi punctul $M \in (AB)$. Demonstraţi că

$$\text{vol}(DAMC) = \text{vol}(DBMC) \text{ dacă şi numai dacă } (AM) \equiv (MB).$$

IV. Teorema lui Menelaus si teorema lui Ceva (tratare metodică). Se vor aborda:
(a) Enunţ şi demonstraţie;
(b) Reciproce (enunţuri şi demonstraţii);
(c) Compuneţi o problemă a cărei rezolvare să se bazeze pe teorema lui Menelaus sau a lui Ceva.

Notă. Timp de lucru: 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.

Preşedinte de comisie

Conf. dr. Viviana Ene