

## EXAMEN DE DEFINITIVAT PROBA SCRISĂ DE MATEMATICĂ

**I.** Fie  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  o rădăcină primitivă de grad 3 a unității. Se consideră polinoamele  $\eta_1 = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $\eta_2 = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3$  și  $\eta_3 = \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_2 + x_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ .

- (a) Exprimați  $x_1, x_2, x_3$  ca polinoame în  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ .
- (b) Fie  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ . Demonstrați că  $f$  este invariant la permutarea ciclică a nedeterminatelor  $x_1, x_2, x_3$  dacă și numai dacă  $f$  este de forma

$$f = \sum_{\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)} c_{\mathbf{a}} \eta_1^{a_1} \eta_2^{a_2} \eta_3^{a_3},$$

unde  $2a_2 + a_3 \equiv 0 \pmod{3}$  pentru orice  $\mathbf{a}$  cu  $c_{\mathbf{a}} \neq 0$ .

**II.** Se consideră funcțiile  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{t+1} dt,$$

unde  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Să se calculeze  $f_0(x)$ .
- (b) Să se arate că  $f'_n(x) \leq x$ , pentru orice  $x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ .
- (c) Să se arate că  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$ , pentru orice  $x \in [0, 1]$ .
- (d) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

**III.** Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $O, G, H$  respectiv centrul cercului circumscris, centrul de greutate și ortocentrul triunghiului  $ABC$ .

- (a) Să se arate că punctele  $O, G, H$  sunt coliniare.
- (b) Folosind eventual relația  $3OG = OH$ , să se deducă relația

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

- (c) Fie  $M$  un punct care aparține cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , diferit de  $A, B, C$ . Se notează cu  $H_A$  ortocentrul triunghiului  $MBC$ , cu  $H_B$  ortocentrul triunghiului  $MAC$  și cu  $H_C$  ortocentrul triunghiului  $MAB$ . Folosind eventual relația de la punctul (b), să se arate că  $\Delta H_A H_B H_C \equiv \Delta ABC$ .

**IV.** Proiectați lecția cu tema *Relațiile lui Viète* având în vedere identificarea clară a obiectivelor și a conținuturilor lecției și urmărind planul:

- Teorema lui Viète pentru relațiile între rădăcinile și coeficienții unui polinom cu coeficienți în  $\mathbb{C}$ .
- Cazuri particulare uzuale: relațiile lui Viète pentru polinoamele de grad 2, 3, 4.
- Prezentați trei probleme reprezentative pentru tema propusă.

Timp de lucru: 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.

Președinte de comisie:

Prof. dr. Wladimir Boskoff